

Flächenberechnungen mit Integralen

Aufgaben und Lösungen

Flächenberechnung mit Integralen

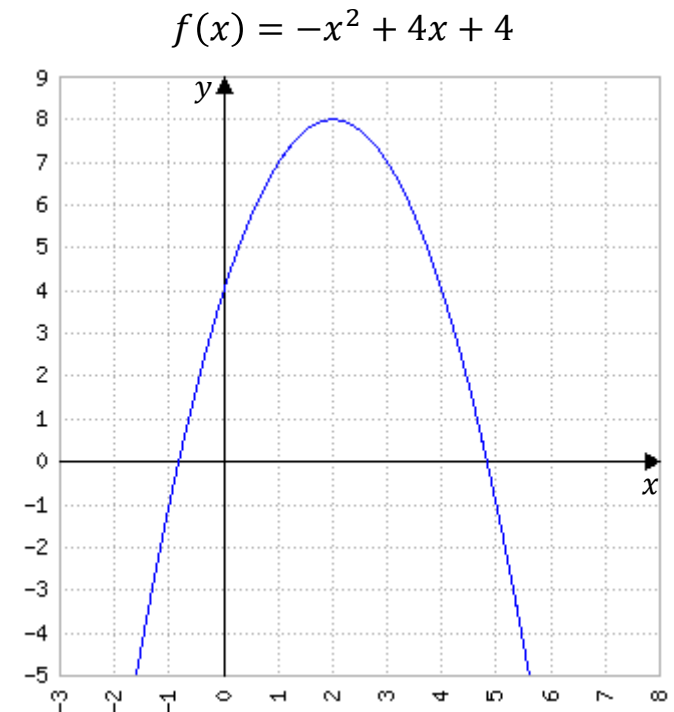
2

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = -x^2 + 4x + 4.$$

- a) Berechnen Sie die Fläche, die die Kurve mit den Koordinatenachsen einschließt.
- b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse und zwischen den Geraden $x = 1$ und $x = 4$.
- c) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse im Intervall $[4; 5,5]$.



Flächenberechnung mit Integralen

3

Lösung Aufgabe 1 a):

Fläche, die die Kurve mit den Koordinatenachsen einschließt.

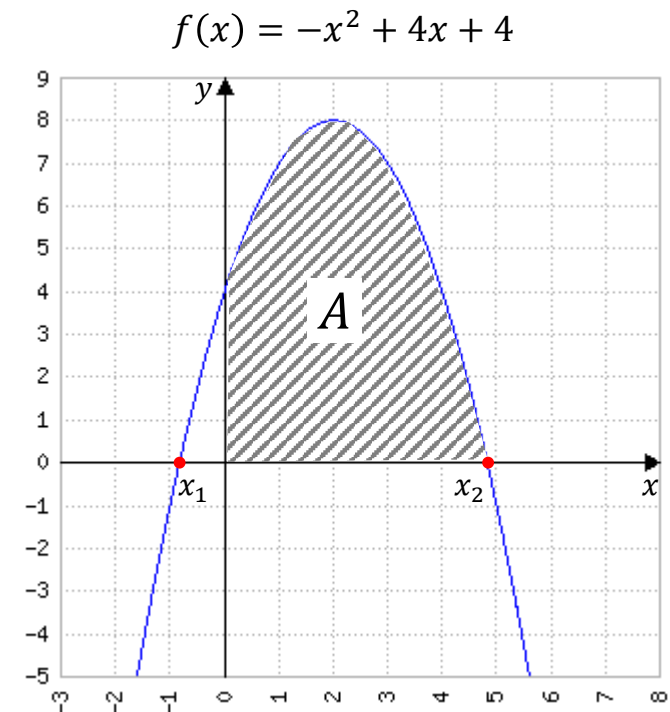
Nullstellen mit pq-Formel:

$$-x^2 + 4x + 4 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{8}; \quad \underline{x_2 = 2 + \sqrt{8}}$$

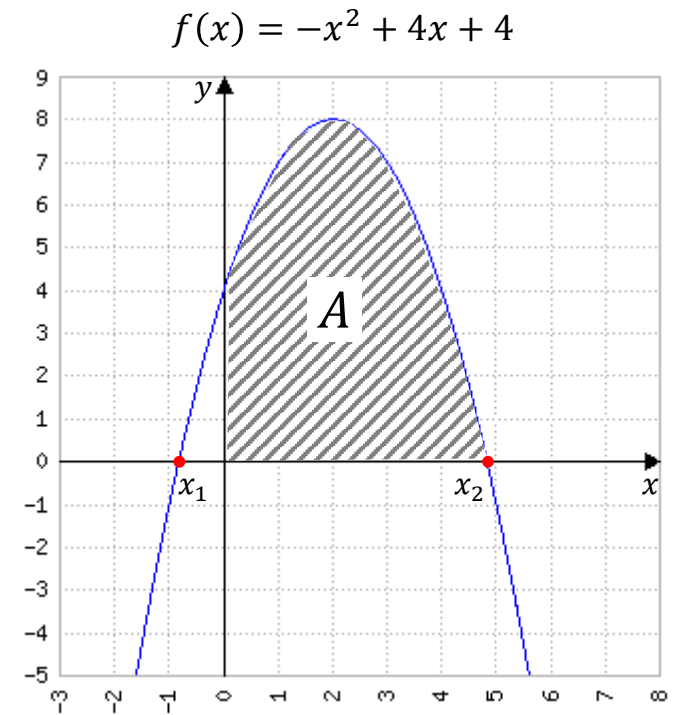


Flächenberechnung mit Integralen

4

Fläche:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \int_0^{2+\sqrt{8}} (-x^2 + 4x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x \right]_0^{2+\sqrt{8}} \\ &= 28,418 - 0 \\ &= \underline{28,418 \text{ LE}^2} \end{aligned}$$



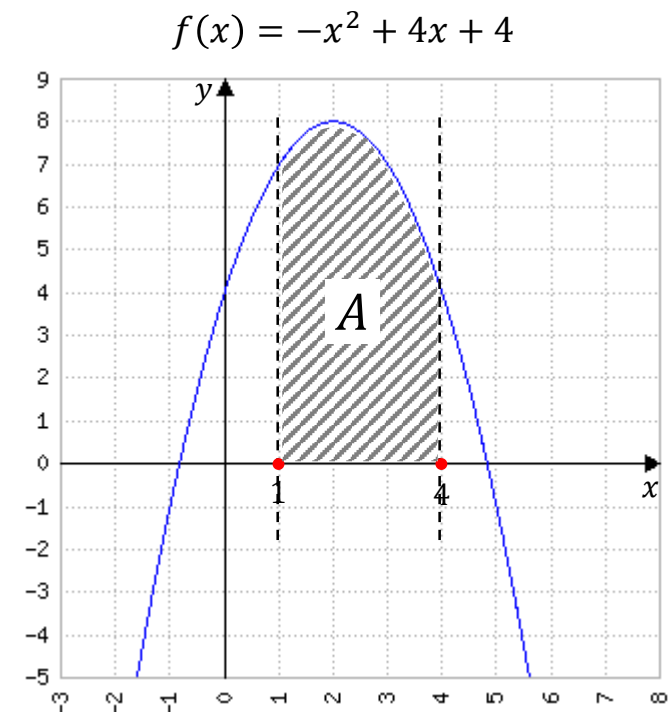
Flächenberechnung mit Integralen

5

Lösung Aufgabe 1 b):

Fläche zwischen Kurve, x -Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 4$

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \int_1^4 (-x^2 + 4x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x \right]_1^4 \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 32 + 16 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 2 + 4 \right) \\ &= 26\frac{2}{3} - 5\frac{2}{3} = \underline{21 \text{ LE}^2} \end{aligned}$$



Flächenberechnung mit Integralen

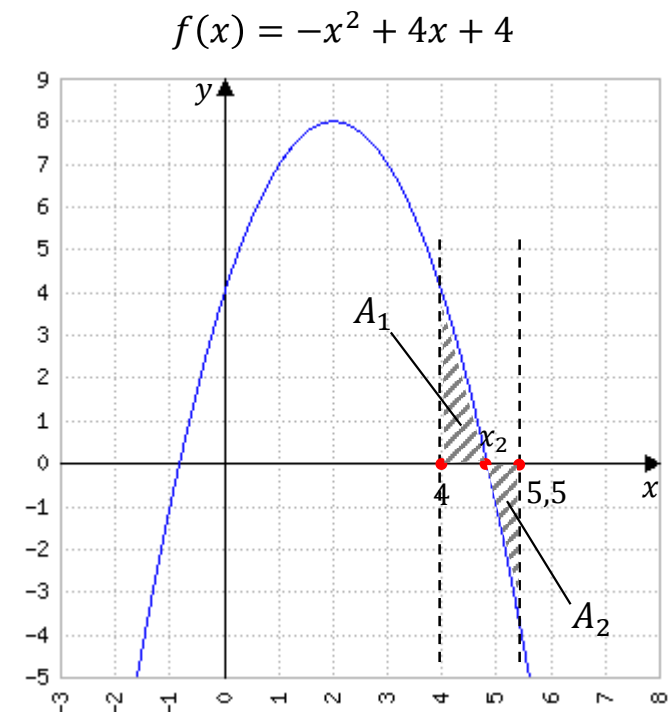
6

Lösung Aufgabe 1 c):

Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse im Intervall $[4; 5,5]$.

In diesem Fall liegt ein Flächenstück oberhalb und ein Flächenstück unterhalb der x -Achse.

Wir müssen daher die Flächen A_1 und A_2 getrennt berechnen und jeweils die Beträge nehmen, damit es beim Zusammenzählen nicht zu Auslöschungen kommt.



Flächenberechnung mit Integralen

7

Lösung Aufgabe 1 c):

Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse im Intervall $[4; 5,5]$.

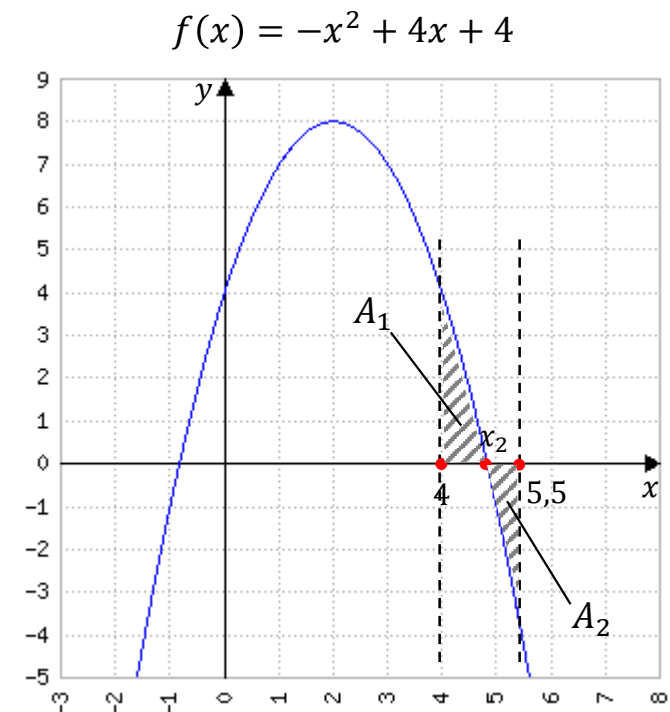
Die Nullstelle $x_2 = 2 + \sqrt{8}$ ist bereits aus Teilaufgabe 1a) bekannt.

$$A_1 = \int_4^{2+\sqrt{8}} (-x^2 + 4x + 4) dx = 1,75$$

$$A_2 = \int_{2+\sqrt{8}}^{5,5} (-x^2 + 4x + 4) dx = -1,38$$

$$\underline{A = |A_1| + |A_2| = 3,13 \text{ LE}^2}$$

(Ergebnis auf 2 Stellen gerundet).



Flächenberechnung mit Integralen

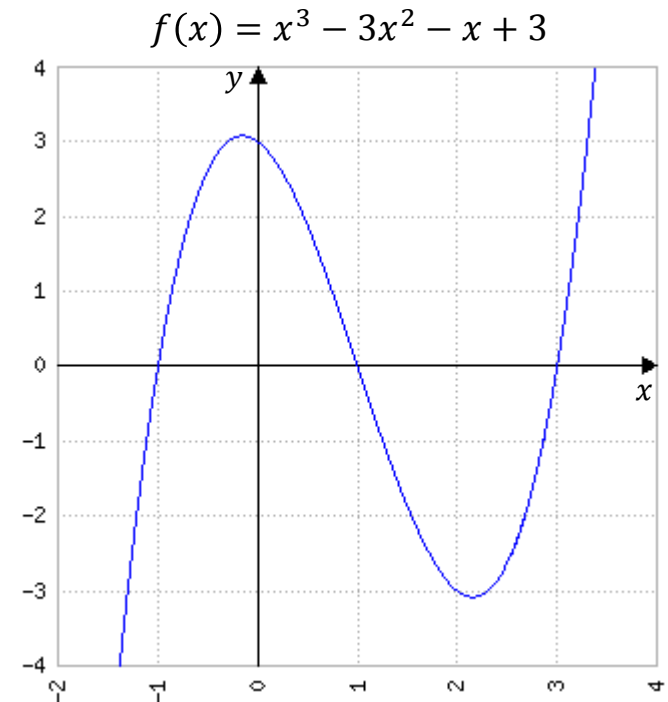
8

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

- a) Berechnen Sie die Fläche, die die Kurve mit der x -Achse einschließt zwischen den Geraden $x = 2$ und $x = 3$.
- b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse zwischen der ersten und der letzten Nullstelle.
- c) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve, der x -Achse und zwischen den beiden Extrempunkten.



Flächenberechnung mit Integralen

9

Lösung Aufgabe 2 a):

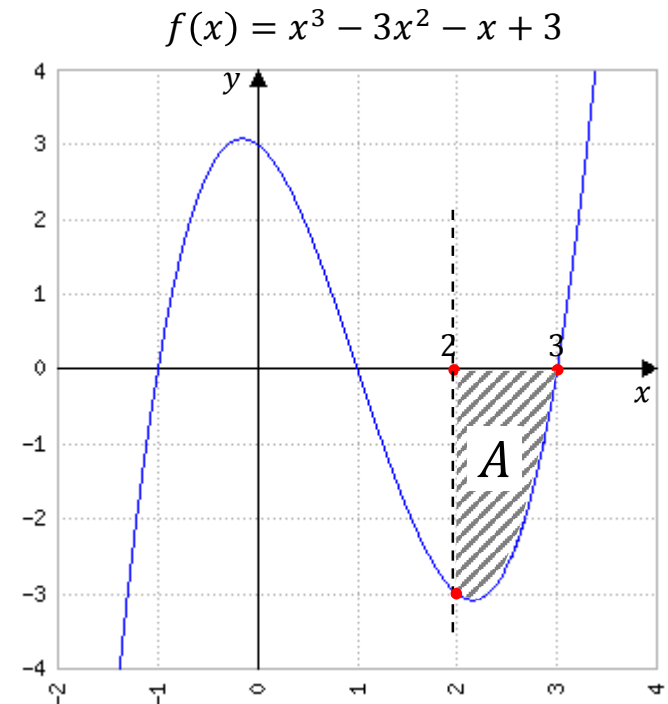
Fläche zwischen $x = 2$ und $x = 3$:

Bei $x = 3$ hat $f(x)$ einen Nullstelle.

Zwischen $x = 2$ und $x = 3$ verläuft der Graph von f unterhalb der x -Achse.

Für die Flächenberechnung mit dem Integral müssen wir also den Betrag nehmen.

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \left| \int_2^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_2^3 \right| = \left| -\frac{9}{4} - 0 \right| = \underline{2,25 \text{ LE}^2} \end{aligned}$$



Flächenberechnung mit Integralen

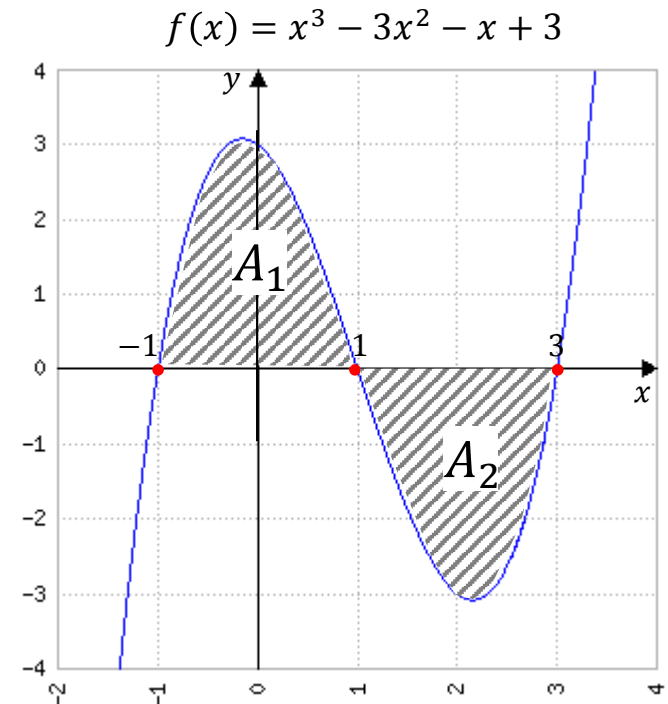
10

Lösung Aufgabe 2 b):

Fläche zwischen erster und letzter Nullstelle

Durch einfaches „Raten“ findet man die Nullstellen bei $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$.

Da zwischen $x_1 = -1$ und $x_3 = 3$ der Graph von f teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x -Achse verläuft, müssen wir die beiden Teilflächen einzeln berechnen und für das Flächenstück unterhalb der x -Achse den Betrag nehmen.



$$\text{Somit gilt: } A = A_1 + A_2 = \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^3 f(x) dx \right|$$

Flächenberechnung mit Integralen

11

$$A_1 = \left| \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^1 \right|$$

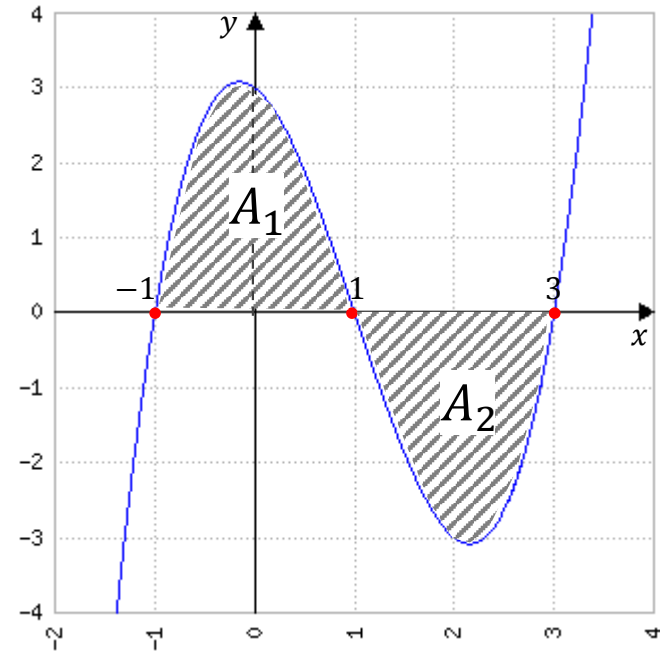
$$= \left| \frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4} \right) \right| = 4$$

$$A_2 = \left| \int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_1^3 \right|$$

$$= \left| -\frac{9}{4} - \frac{7}{4} \right| = 4$$

Somit gilt: $A = A_1 + A_2 = 8 LE^2$



Flächenberechnung mit Integralen

12

Lösung Aufgabe 2 c):

Fläche zwischen den beiden Extrempunkten

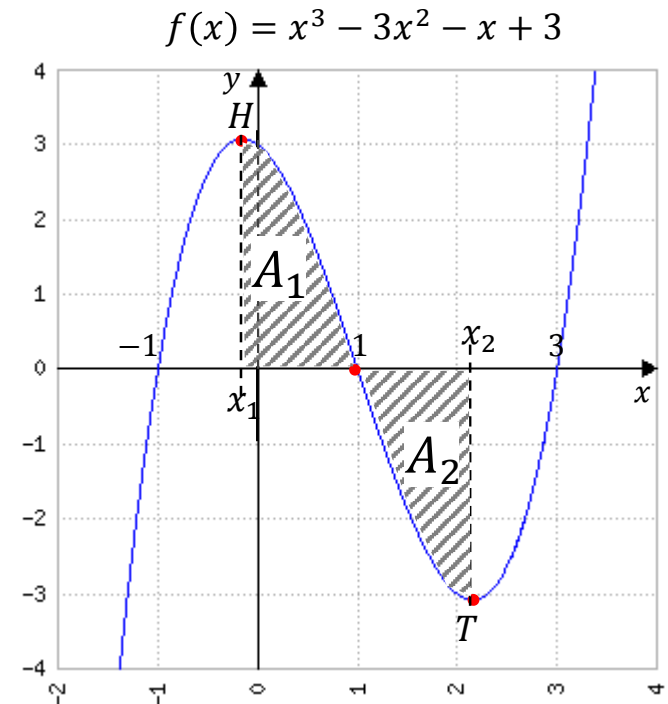
Wie vorher müssen zwei Teilflächen berechnet und anschließend die Beträge gebildet werden.

Zuerst aber werden die x -Koordinaten von H und T bestimmt:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0 \quad | \text{ pq-Formel}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ also } x_1 \approx -0,15 \text{ bzw. } x_2 \approx 2,15$$

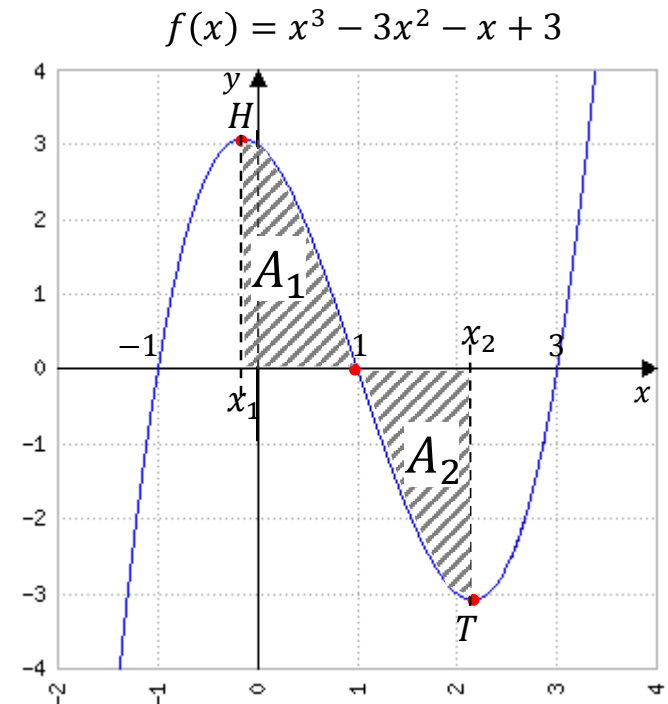


Flächenberechnung mit Integralen

13

$$\begin{aligned} A_1 &= \left| \int_{-0,15}^1 f(x) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4} x^4 - x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_{-0,15}^1 \right| \\ &= |1,75 - (-0,46)| = 2,21 \\ A_2 &= \left| \int_1^{2,15} f(x) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4} x^4 - x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_1^{2,15} \right| \\ &= |-0,46 - 1,75| = 2,21 \end{aligned}$$

Somit gilt: $A = A_1 + A_2 = 4,42 \text{ LE}^2$ (Ergebnisse auf 2 Stellen gerundet!)



Flächenberechnung mit Integralen

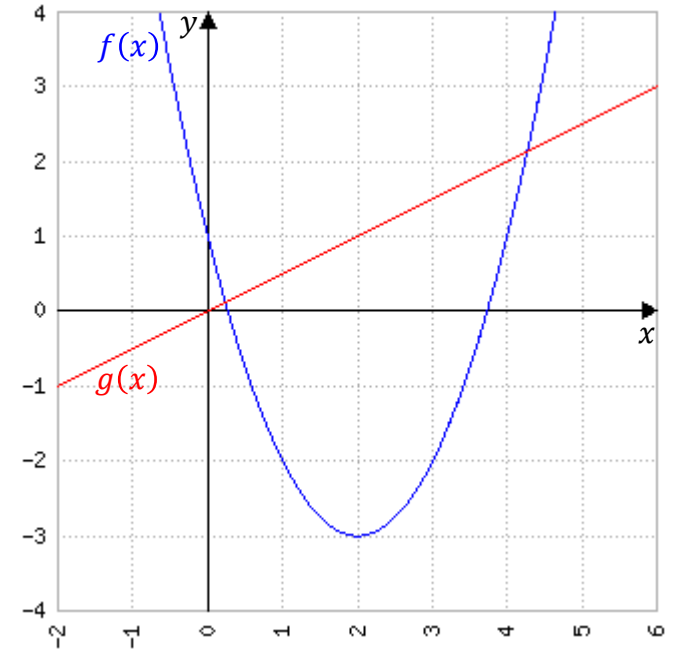
14

Aufgabe 3

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \text{ und } g(x) = \frac{1}{2}x.$$

- a) Berechnen Sie die Fläche zwischen beiden Kurven im Intervall $[1; 3]$.
- b) Berechnen Sie die Fläche zwischen beiden Kurven und zwischen den beiden Schnittpunkten.



Flächenberechnung mit Integralen

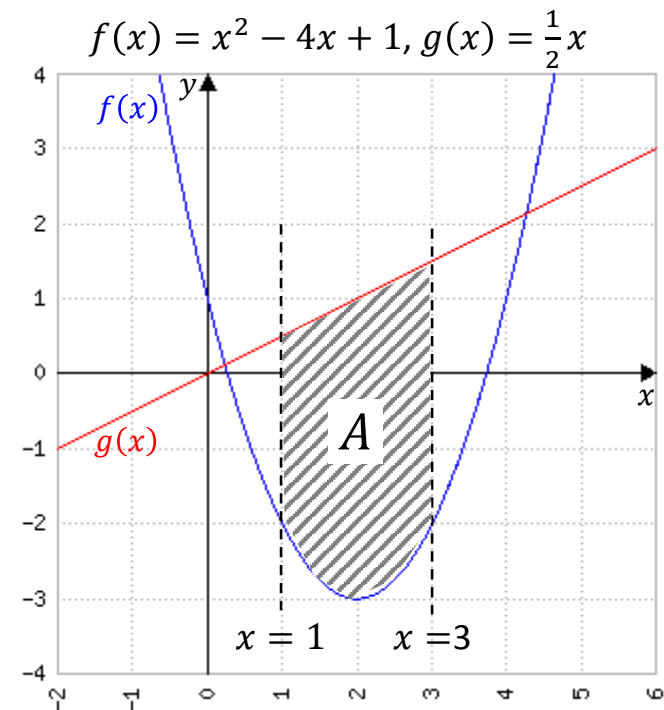
15

Lösung zu Aufgabe 3 a)

Fläche zwischen beiden Kurven im Intervall $[1; 3]$

Da im Intervall $[1; 3]$ $g(x)$ die obere und $f(x)$ die untere Kurve ist folgt:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_1^3 \left(-x^2 + \frac{9}{2}x - 1 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - x \right]_1^3 \\ &= \left(-9 + \frac{81}{4} - 3 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{9}{4} - 1 \right) \\ &= \frac{33}{4} - \frac{19}{4} = \underline{6 \text{ LE}^2} \end{aligned}$$



Flächenberechnung mit Integralen

16

Lösung zu Aufgabe 3 b)

Fläche zwischen den Schnittpunkten der Kurven

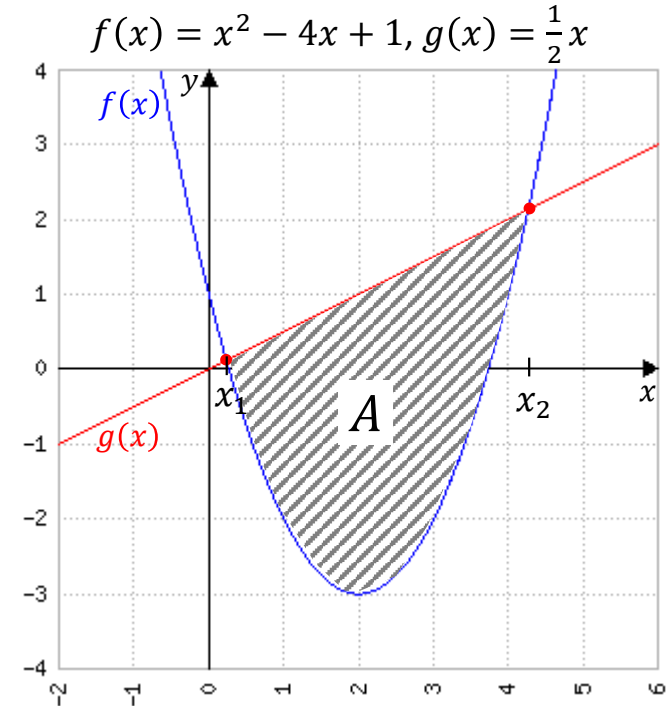
Schnittpunkte:

$$x^2 - 4x + 1 = \frac{1}{2}x$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 1 = 0 \quad | \text{pq-Formel}$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - 1}$$

$$x_1 \approx 0,23 \text{ bzw. } x_2 \approx 4,27$$



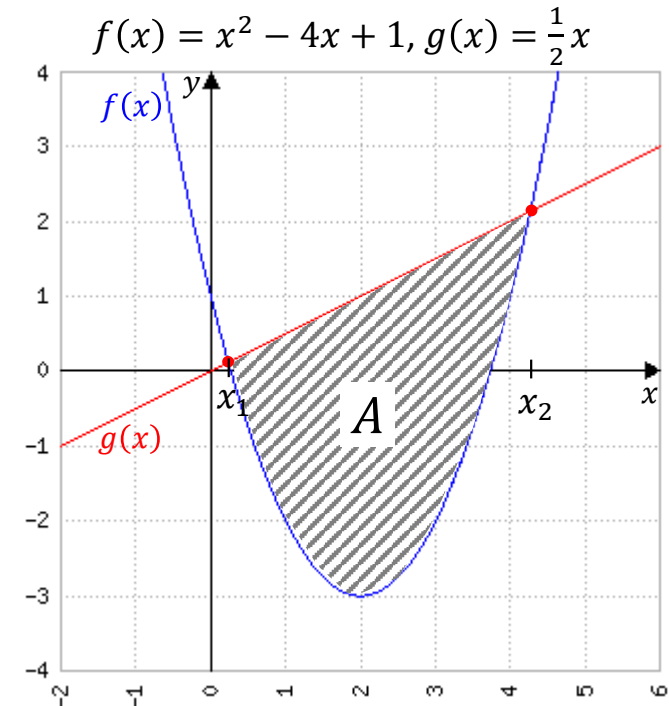
Flächenberechnung mit Integralen

17

Lösung zu Aufgabe 3 b)

Fläche zwischen den Schnittpunkten der Kurven

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \int_{0,23}^{4,27} (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{0,23}^{4,27} \left(-x^2 + \frac{9}{2}x - 1 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - x \right]_{0,23}^{4,27} \\ &= 10,8 - (-0,12) = \underline{10,92 \text{ LE}^2}\end{aligned}$$



Flächenberechnung mit Integralen

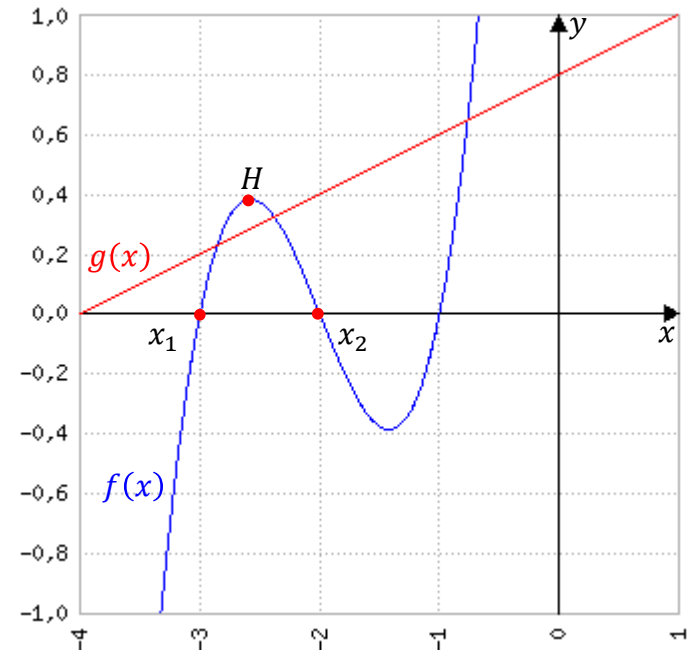
18

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$$

- a) Die Nullstellen x_1 und x_2 und der Hochpunkt H von $f(x)$ bilden ein Dreieck. Berechnen Sie die Fläche dieses Dreiecks.
- b) Wieviel Prozent beträgt diese Dreiecksfläche in Bezug auf die Fläche zwischen $f(x)$ der x -Achse und zwischen x_1 und x_2 ?
- c) Die Gerade $g(x) = 0,2x + 0,8$ schneidet von $f(x)$ bei H ein „Käppchen“ ab. Wie groß ist die Fläche dieses Käppchens?



Flächenberechnung mit Integralen

19

Lösung zu Aufgabe 4 a)

Fläche des Dreiecks $x_1 x_2 H$

Schritt 1: Nullstellen raten

Man sieht, dass für $x \geq 0$ auch $f(x) > 0$ ist, also müssen die Nullstellen negativ sein

Wir prüfen z.B. $x = -1$:

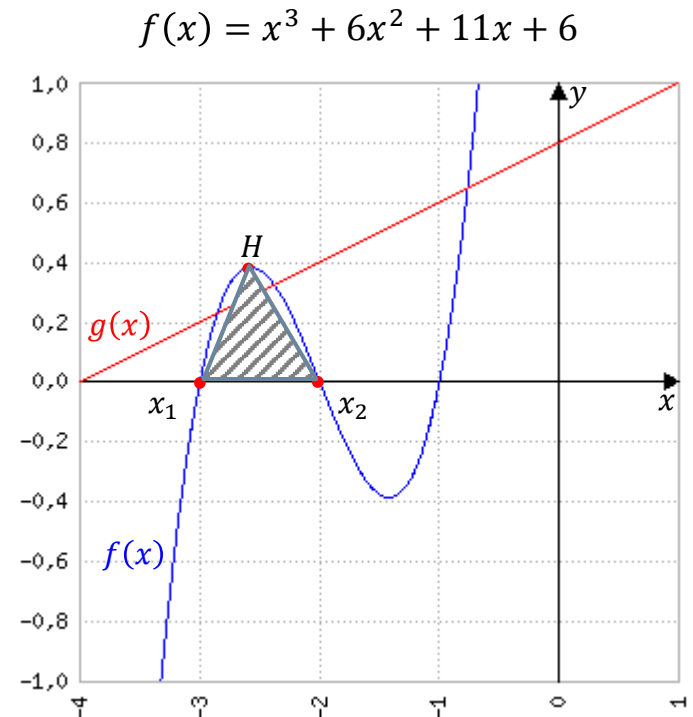
$$f(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$$

Wir prüfen weiter $x = -2$ und $x = -3$:

$$f(-2) = -8 + 24 - 22 + 6 = 0$$

$$f(-3) = -27 + 54 - 33 + 6 = 0$$

Damit sind $x_1 = -3$ und $x_2 = -2$ die ersten beiden Nullstellen von $f(x)$.



Flächenberechnung mit Integralen

20

Lösung zu Aufgabe 4 a)

Schritt 2: Hochpunkt bestimmen

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 11 = 0 \quad |:3$$

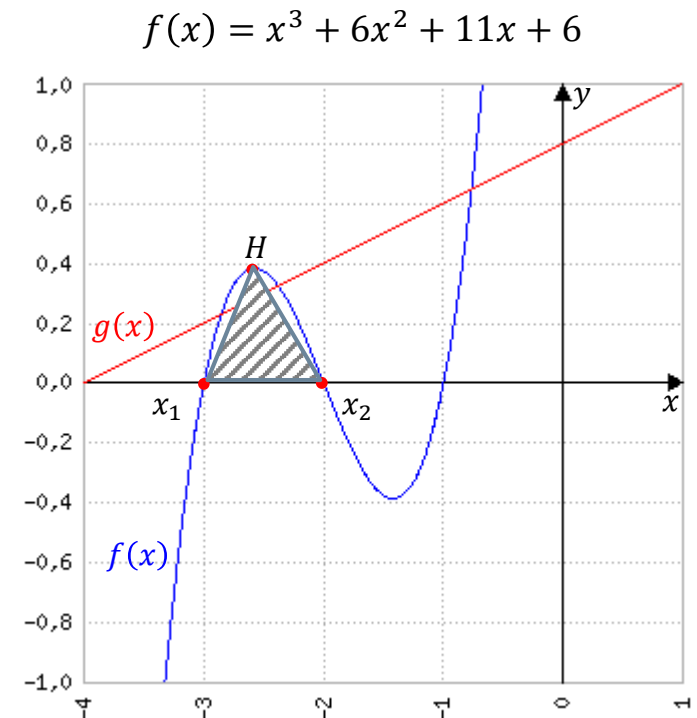
$$x^2 + 4x + \frac{11}{3} = 0 \quad | \text{ pq-Formel}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{11}{3}}$$

$$x_1 = -2,58; x_2 = -1,42$$

Mit $f''(x) = 6x + 12$ und $f''(-2,58) < 0$
ist $x_1 = -2,58$ die x-Koordinate des Hochpunkts.

Mit $f(x_1) = 0,38$ folgt nun $H(-2,58|0,38)$.



Flächenberechnung mit Integralen

21

Lösung zu Aufgabe 4 a)

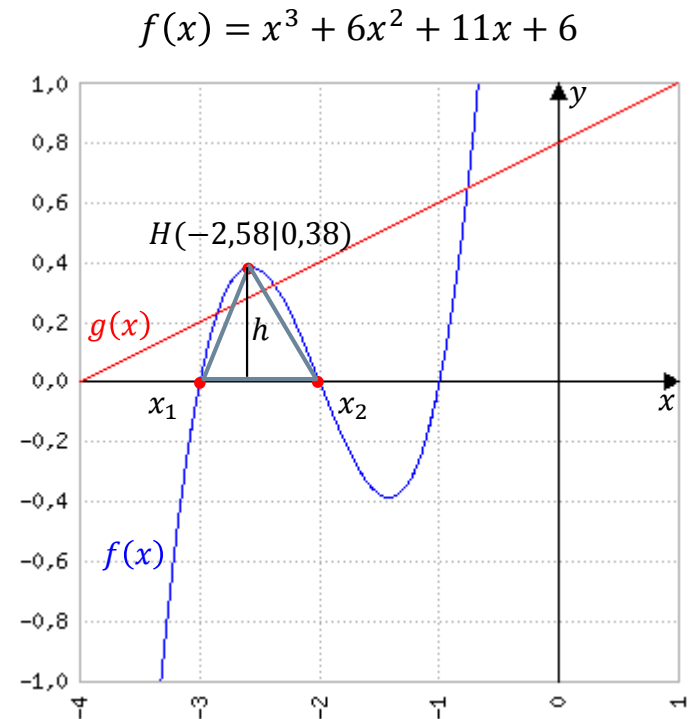
Schritt 3: Fläche des Dreiecks

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) \cdot h$$

h ist die y -Koordinate von H , also $h = 0,38$

$$x_2 - x_1 = -2 - (-3) = 1$$

$$\text{Es folgt } \underline{A_{\Delta}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,38 = \underline{0,19 \text{ LE}^2}$$



Flächenberechnung mit Integralen

22

Lösung zu Aufgabe 4 b)

Prozentanteil der Dreiecksfläche

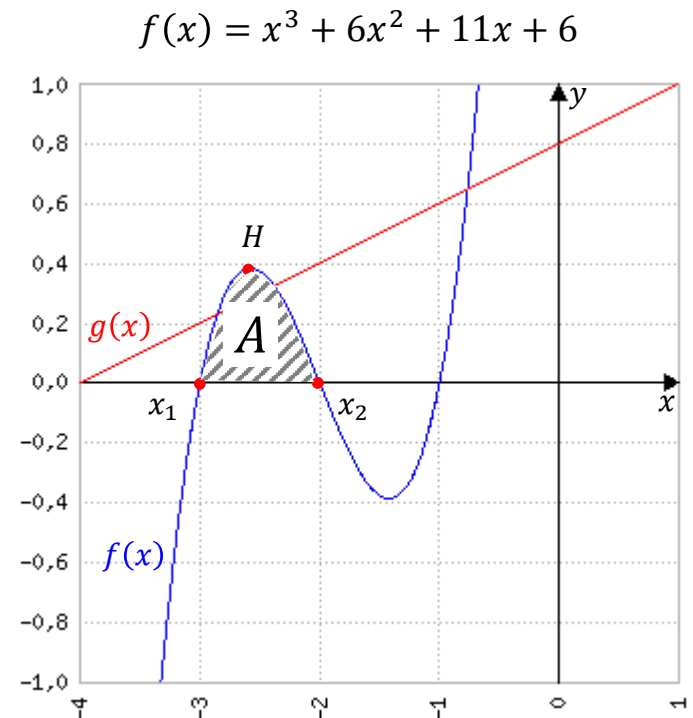
Schritt 1: Fläche zwischen x_1 und x_2

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \int_{-3}^{-2} (x^3 + 6x^2 + 11x + 6) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x \right]_{-3}^{-2} \\ &= (-2) - (-2,25) = \underline{0,25 \text{ LE}^2} \end{aligned}$$

Schritt 2: Prozentanteil

$$p = \frac{A_{\Delta}}{A} = \frac{0,19}{0,25} = 0,76, \text{ also } p = 76\%.$$

Ergebnis: Das Dreieck bedeckt etwa 76% der Fläche zwischen den ersten beiden Nullstellen des Graphen von $f(x)$.



Flächenberechnung mit Integralen

23

Lösung zu Aufgabe 4 c)

Fläche des Kämpchens

Schritt 1: Schnittpunkte bestimmen

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0,2x + 0,8$$

Taschenrechner: $x_1 = -2,86$; $x_2 = -2,38$

Schritt 2: Fläche bestimmen

$$A = \int_{-2,86}^{-2,38} (f(x) - g(x)) dx = 0,034 LE^2$$

(z.B. mit GTR: fnInt($Y_1 - Y_2, X, -2.86, -2.38$) nach vorheriger Eingabe von $f(x)$ und $g(x)$ im Y-Editor bei Y_1 bzw. Y_2)

