

e-Funktionen

Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion f durch

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}; \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen und alle Extrempunkte.
- b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangente T und der Normalen N im Schnittpunkt S_x des Graphen von f mit der x -Achse.
- c) Bestimmen Sie den Winkel α , unter dem der Graph von f die x -Achse schneidet.

Aufgabe 1 - Rest

- d) Der Koordinatenursprung und die Schnittpunkte der Tangente T mit den Koordinatenachsen bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
- e) Zeigen Sie, dass $F(x) = (-2x - 8) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ eine Stammfunktion von f ist.
Bestimmen Sie die Fläche unter dem Graphen von f zwischen den beiden Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

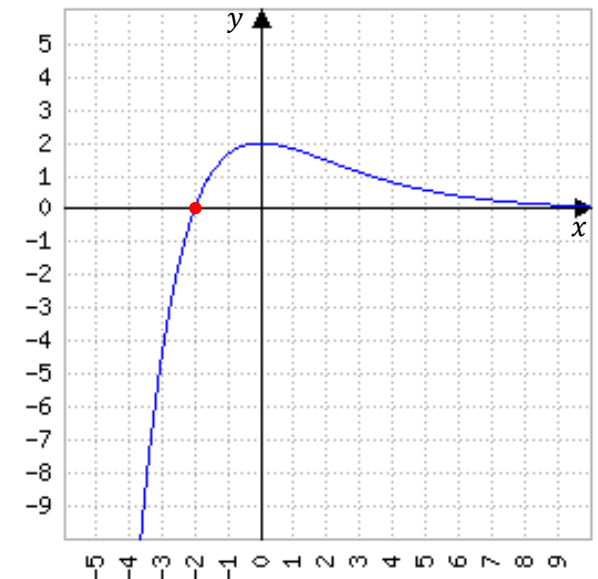
Lösung Aufgabe 1 a)

a) Schnittpunkt mit der x -Achse (Nullstelle)

Da $e^{-\frac{x}{2}} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = 0 \implies (x + 2) = 0 \\ \implies x = -2$$

Somit ist $S_x(-2|0)$ der (einzige) Schnittpunkt mit der x -Achse.



Schnittpunkt mit der y -Achse

Wegen $f(0) = (0 + 2) \cdot e^{-\frac{0}{2}} = 2$ ist $S_y(0|2)$ der Schnittpunkt mit der y -Achse.

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Lösung Aufgabe 1 a)

Extrempunkte

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-\frac{x}{2}} + (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}(x + 2)\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Mit $f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{x}{2}} = 0$ folgt $x = 0$.

Dies ist unser einziger Kandidat für eine Extremstelle.

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Lösung Aufgabe 1 a)

Mit $f''(0) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0\right) \cdot e^{-\frac{0}{2}} = -\frac{1}{2} < 0$ sehen wir, dass bei $x = 0$ ein Hochpunkt vorliegen muss.

Mit $f(0) = 2$ erhalten wir die y -Koordinate dieses Hochpunkts.

Somit ist $H(0|2)$ die einzige Extremstelle von $f(x)$.

Lösung Aufgabe 1 b)

$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$
$$S_x(-2|0)$$

b) Tangenten- und Normalengleichung

Tangentengleichung an der Stelle x_0 : $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Mit $x_0 = -2$ folgt $f'(-2) = e$ und $f(-2) = 0$ und damit

$$\underline{T: y = e \cdot (x + 2) = ex + 2e}$$

Normalengleichung an der Stelle x_0 : $y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Es folgt

$$\underline{N: y = -\frac{1}{e} \cdot (x + 2) = -\frac{1}{e}x - \frac{2}{e}}$$

Lösung Aufgabe 1 c)

c) Schnittwinkel α mit der x -Achse

Die erste Ableitung von f an der Stelle x_0 ist bekanntlich der Tangens der Steigungswinkels in x_0 , d.h. $f'(-2) = e = \tan \alpha$.

Mit dem Taschenrechner (beim GTR mit 2ND TAN) bestimmt man daraus α zu $\alpha = 69,8^\circ$.

Lösung Aufgabe 1 d)

d) Flächeninhalt des Tangentendreiecks

$$A_{\Delta} = \frac{g \cdot h}{2}$$

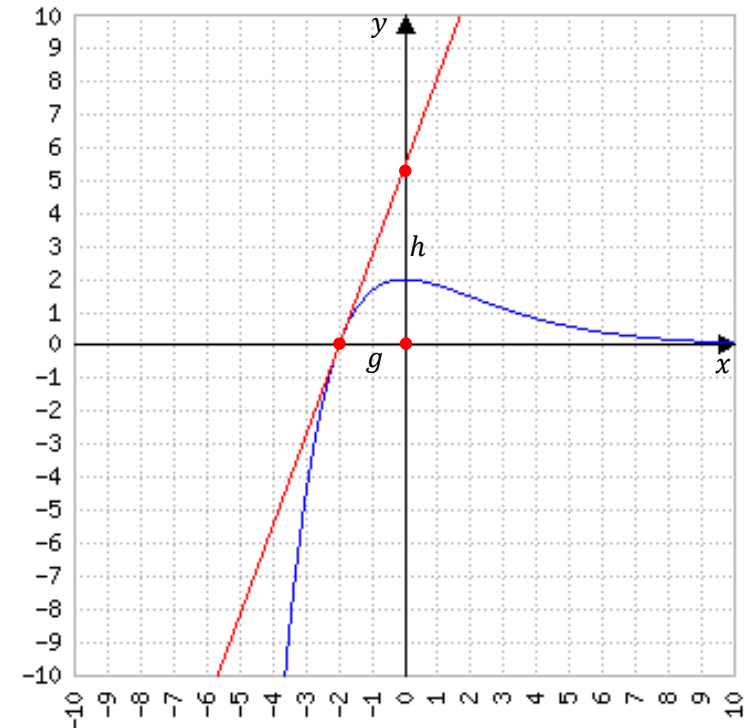
Wegen $S_x(-2|0)$ ergibt sich $g = 2$.

Setze $x = 0$ in T ein und erhalte $y = 2e$.

Dies ist der Schnittpunkt der Tangente mit der y -Achse also die Höhe h unseres Dreiecks. Somit ist $h = 2e$.

Folglich gilt $A_{\Delta} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2e}{2} = 2e = 5,43$

Ergebnis: Das Tangentendreieck hat die Fläche $A = 5,43 \text{ LE}^2$



$$f(x) = (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Lösung Aufgabe 1 e)

e) Behauptung: $F(x) = (-2x - 8) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ sei eine Stammfunktion

Für den Beweis muss f lediglich einmal abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} + (-2x - 8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \left(-2 + (-2x - 8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \underline{f(x)} \end{aligned}$$

Fläche unterhalb des Graphen

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen liegen bei $x = -2$ und $x = 0$. Somit gilt:

$$\underline{A} = \int_{-2}^0 f(x) dx = [F(x)]_{-2}^0 = -8 + 4e \approx \underline{2,87}$$