Flächenberechnungen mit Integralen

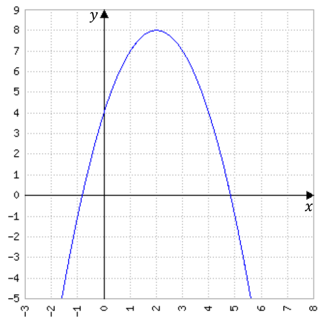
Aufgaben und Lösungen

Flächenberechnung mit Integralen

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion
$f(x) = -x^2 + 4x + 4$.

$f(x) = -x^2 + 4x + 4$



a) Berechnen Sie die Fläche, die die Kurve mit den Koordinatenachsen einschließt.

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse und zwischen den Geraden $x = 1$ und $x = 4$.

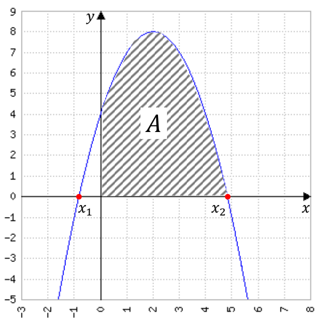
c) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall $[4; 5{,}5]$.

Flächenberechnung mit Integralen

Lösung Aufgabe 1 a):

Fläche, die die Kurve mit den Koordinatenachsen einschließt.

$f(x) = -x^2 + 4x + 4$



Nullstellen mit pq-Formel:

$-x^2 + 4x + 4 = 0 \;|\cdot(-1)$

$x^2 - 4x - 4 = 0$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+4}$

$\Rightarrow \; x_1 = 2 - \sqrt{8}; \quad \underline{x_2 = 2 + \sqrt{8}}$

Flächenberechnung mit Integralen

Fläche:

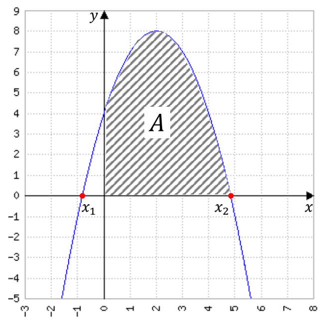
$$\underline{A} = \int_0^{2+\sqrt{8}} (-x^2 + 4x + 4)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_0^{2+\sqrt{8}}$$

$$= 28{,}418 - 0$$

$$\underline{= 28{,}418 \text{ LE}^2}$$

$f(x) = -x^2 + 4x + 4$



Flächenberechnung mit Integralen

Lösung Aufgabe 1 b):

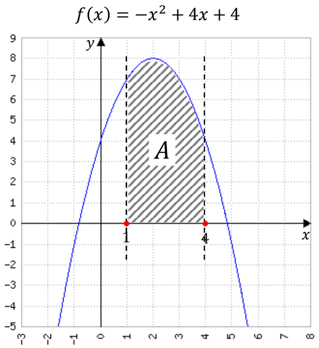
Fläche zwischen Kurve, x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 4$

$$\underline{A} = \int_1^4 (-x^2 + 4x + 4)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_1^4$$

$$= \left(-\tfrac{64}{3} + 32 + 16\right) - \left(-\tfrac{1}{3} + 2 + 4\right)$$

$$= 26\tfrac{2}{3} - 5\tfrac{2}{3} = \underline{21\ LE^2}$$



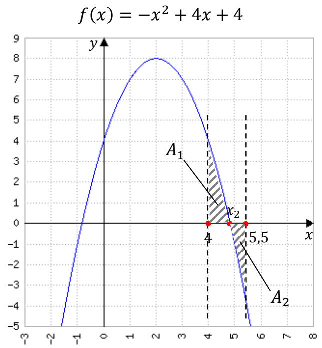
Flächenberechnung mit Integralen

Lösung Aufgabe 1 c):

Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall $[4; 5{,}5]$.

In diesem Fall liegt ein Flächenstück oberhalb und ein Flächenstück unterhalb der x-Achse.

Wir müssen daher die Flächen A_1 und A_2 getrennt berechnen und jeweils die Beträge nehmen, damit es beim Zusammenzählen nicht zu Auslöschungen kommt.



Flächenberechnung mit Integralen

Lösung Aufgabe 1 c):

Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall $[4; 5{,}5]$.

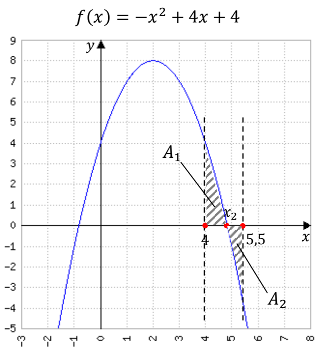
Die Nullstelle $x_2 = 2 + \sqrt{8}$ ist bereits aus Teilaufgabe 1a) bekannt.

$$A_1 = \int_4^{2+\sqrt{8}} (-x^2 + 4x + 4)\,dx = 1{,}75$$

$$A_2 = \int_{2+\sqrt{8}}^{5{,}5} (-x^2 + 4x + 4)\,dx = -1{,}38$$

$$\underline{A} = |A_1| + |A_2| = \underline{3{,}13\ LE^2}$$

(Ergebnis auf 2 Stellen gerundet).

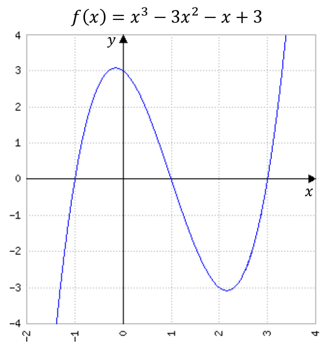


Flächenberechnung mit Integralen

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$



a) Berechnen Sie die Fläche, die die Kurve mit der x-Achse einschließt zwischen den Geraden $x = 2$ und $x = 3$.

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse zwischen der ersten und der letzten Nullstelle.

c) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und zwischen den beiden Extrempunkten.

Flächenberechnung mit Integralen

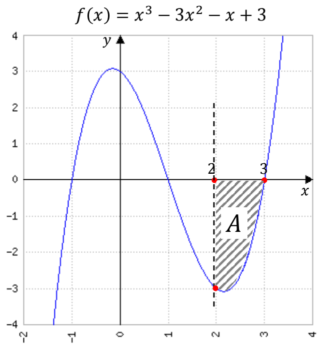
Lösung Aufgabe 2 a):

Fläche zwischen $x = 2$ und $x = 3$:

Bei $x = 3$ hat $f(x)$ einen Nullstelle.

Zwischen $x = 2$ und $x = 3$ verläuft der Graph von f unterhalb der x-Achse.

Für die Flächenberechnung mit dem Integral müssen wir also den Betrag nehmen.



$$\underline{A} = \left|\int_2^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_2^3\right| = \left|-\frac{9}{4} - 0\right| = \underline{2{,}25\ LE^2}$$

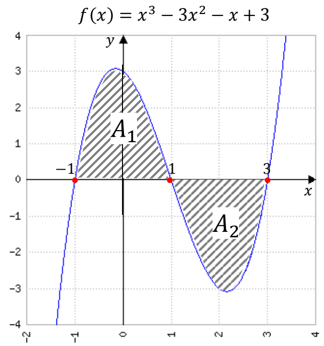
Flächenberechnung mit Integralen

Lösung Aufgabe 2 b):

Fläche zwischen erster und letzter Nullstelle

Durch einfaches „Raten“ findet man die Nullstellen bei $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$.

Da zwischen $x_1 = -1$ und $x_3 = 3$ der Graph von f teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse verläuft, müssen wir die beiden Teilflächen einzeln berechnen und für das Flächenstück unterhalb der x-Achse den Betrag nehmen.



Somit gilt: $A = A_1 + A_2 = \left|\int_{-1}^1 f(x)dx\right| + \left|\int_1^3 f(x)dx\right|$

Flächenberechnung mit Integralen

$$A_1 = \left|\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx\right|$$

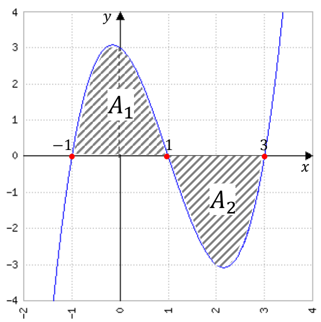
$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^1\right|$$

$$= \left|\frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right)\right| = 4$$

$$A_2 = \left|\int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_1^3\right|$$

$$= \left|-\frac{9}{4} - \frac{7}{4}\right| = 4$$



Somit gilt: $\underline{A = A_1 + A_2 = 8\ LE^2}$

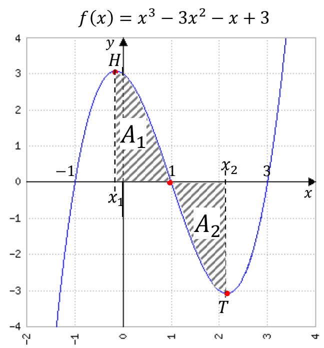
Flächenberechnung mit Integralen

Lösung Aufgabe 2 c):

Fläche zwischen den beiden Extrempunkten

Wie vorher müssen zwei Teilflächen berechnet und anschließend die Beträge gebildet werden.

Zuerst aber werden die x-Koordinaten von H und T bestimmt:



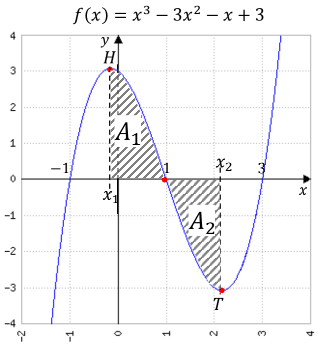
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0 \quad |:3$

$x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0 \quad$ | pq-Formel

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ also $x_1 \approx -0{,}15$ bzw. $x_2 \approx 2{,}15$

Flächenberechnung mit Integralen

$$A_1 = \left|\int_{-0{,}15}^{1} f(x)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-0{,}15}^{1}\right|$$
$$= |1{,}75 - (-0{,}46)| = 2{,}21$$
$$A_2 = \left|\int_{1}^{2{,}15} f(x)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{1}^{2{,}15}\right|$$
$$= |-0{,}46 - 1{,}75| = 2{,}21$$



Somit gilt: $A = A_1 + A_2 = 4{,}42\ LE^2$ (Ergebnisse auf 2 Stellen gerundet!)

Flächenberechnung mit Integralen

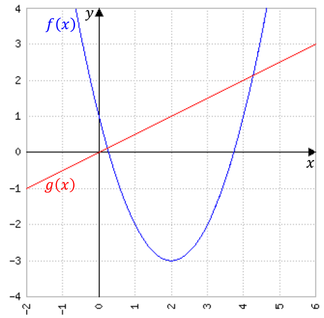
Aufgabe 3

Gegeben seien die Funktionen

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = \frac{1}{2}x$.

a) Berechnen Sie die Fläche zwischen beiden Kurven im Intervall $[1; 3]$.

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen beiden Kurven und zwischen den beiden Schnitt-punkten.



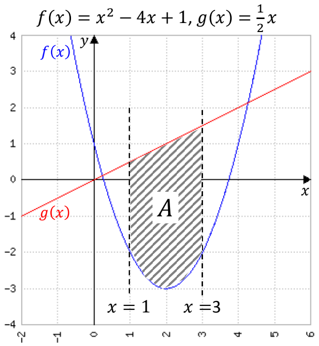
Flächenberechnung mit Integralen

Lösung zu Aufgabe 3 a)

Fläche zwischen beiden Kurven im Intervall $[1; 3]$

Da im Intervall $[1; 3]$ $g(x)$ die obere und $f(x)$ die untere Kurve ist folgt:

$$A = \int_1^3 \big(g(x) - f(x)\big)dx$$
$$= \int_1^3 \left(-x^2 + \frac{9}{2}x - 1\right)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - x\right]_1^3$$
$$= \left(-9 + \frac{81}{4} - 3\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{9}{4} - 1\right)$$
$$= \frac{33}{4} - \frac{19}{4} = 6\ LE^2$$



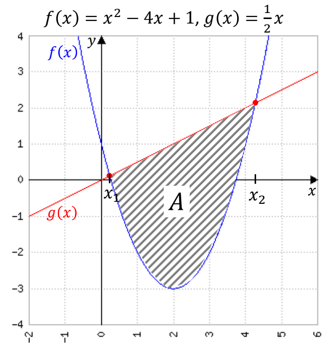
Flächenberechnung mit Integralen

Lösung zu Aufgabe 3 b)

Fläche zwischen den Schnittpunkten der Kurven

Schnittpunkte:

$$x^2 - 4x + 1 = \frac{1}{2}x$$
$$x^2 - \frac{9}{2}x + 1 = 0 \qquad |\text{pq-Formel}$$
$$x_{1,2} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - 1}$$
$x_1 \approx 0{,}23$ bzw. $x_2 \approx 4{,}27$



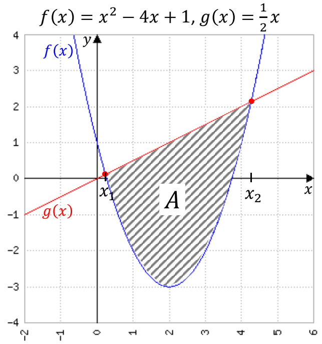
Flächenberechnung mit Integralen

17

Lösung zu Aufgabe 3 b)

Fläche zwischen den Schnittpunkten der Kurven

$$\underline{A} = \int_{0,23}^{4,27} (g(x) - f(x))dx$$
$$= \int_{0,23}^{4,27} \left(-x^2 + \tfrac{9}{2}x - 1\right) dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{9}{4}x^2 - x\right]_{0,23}^{4,27}$$
$$= 10,8 - (-0,12) = \underline{10,92\ LE^2}$$



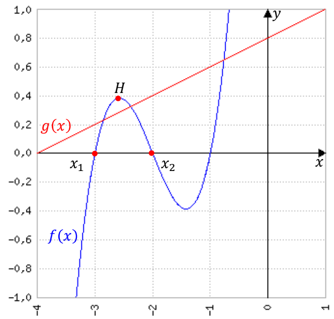
Flächenberechnung mit Integralen

18

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$



a) Die Nullstellen x_1 und x_2 und der Hochpunkt H von $f(x)$ bilden ein Dreieck. Berechnen Sie die Fläche dieses Dreiecks.

b) Wieviel Prozent beträgt diese Dreiecksfläche in Bezug auf die Fläche zwischen $f(x)$ der x-Achse und zwischen x_1 und x_2?

c) Die Gerade $g(x) = 0,2x + 0,8$ schneidet von $f(x)$ bei H ein „Käppchen" ab. Wie groß ist die Fläche dieses Käppchens?

Flächenberechnung mit Integralen

19

Lösung zu Aufgabe 4 a)

Fläche des Dreiecks x_1x_2H

<u>Schritt 1:</u> Nullstellen raten

Man sieht, dass für $x \geq 0$ auch $f(x) > 0$ ist, also müssen die Nullstellen negativ sein
Wir prüfen z.B. $x = -1$:

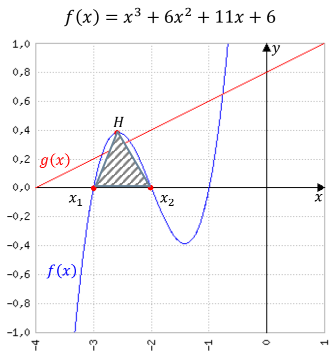
$f(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$

Wir prüfen weiter $x = -2$ und $x = -3$:

$f(-2) = -8 + 24 - 22 + 6 = 0$

$f(-3) = -27 + 54 - 33 + 6 = 0$

Damit sind $\underline{x_1 = -3}$ und $\underline{x_2 = -2}$ die ersten beiden Nullstellen von $f(x)$.



Flächenberechnung mit Integralen

20

Lösung zu Aufgabe 4 a)

<u>Schritt 2:</u> Hochpunkt bestimmen

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 11 = 0 \quad |:3$

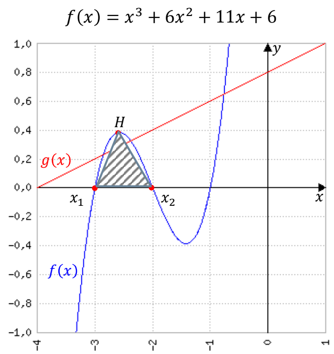
$x^2 + 4x + \frac{11}{3} = 0$ | pq-Formel

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{11}{3}}$

$x_1 = -2,58;\ x_2 = -1,42$

Mit $f''(x) = 6x + 12$ und $f''(-2,58) < 0$ ist $x_1 = -2,58$ die x-Koordinate des Hochpunkts.

Mit $f(x_1) = 0,38$ folgt nun $\underline{H(-2,58|0,38)}$.



Flächenberechnung mit Integralen

21

Lösung zu Aufgabe 4 a)

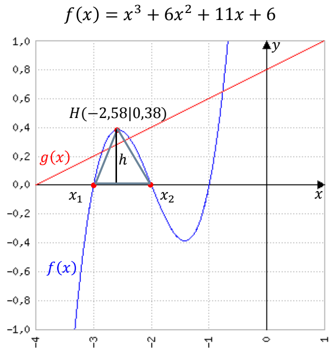
<u>Schritt 3:</u> Fläche des Dreiecks

$A_\Delta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \cdot h$

h ist die y-Koordinate von H, also $h = 0{,}38$

$x_2 - x_1 = -2 - (-3) = 1$

Es folgt $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}38 = 0{,}19\ LE^2$



Flächenberechnung mit Integralen

22

Lösung zu Aufgabe 4 b)

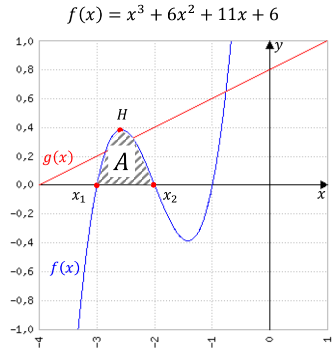
Prozentanteil der Dreiecksfläche

<u>Schritt 1:</u> Fläche zwischen x_1 und x_2

$A = \int_{-3}^{-2} (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x\right]_{-3}^{-2}$

$= (-2) - (-2{,}25) = 0{,}25\ LE^2$



<u>Schritt 2:</u> Prozentanteil

$p = \frac{A_\Delta}{A} = \frac{0{,}19}{0{,}25} = 0{,}76$, also $p = 76\%$.

Ergebnis: Das Dreieck bedeckt etwa 76% der Fläche zwischen den ersten beiden Nullstellen des Graphen von $f(x)$.

Flächenberechnung mit Integralen

23

Lösung zu Aufgabe 4 c)

Fläche des Käppchens

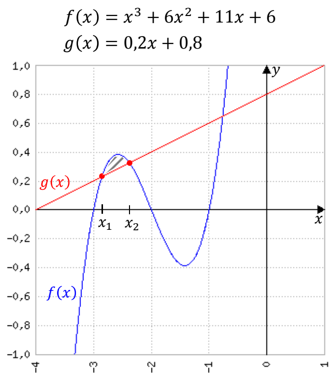
<u>Schritt 1:</u> Schnittpunkte bestimmen

$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0{,}2x + 0{,}8$

Taschenrechner: $x_1 = -2{,}86$; $x_2 = -2{,}38$

<u>Schritt 2:</u> Fläche bestimmen

$A = \int_{-2{,}86}^{-2{,}38} \big(f(x) - g(x)\big)dx = 0{,}034\ LE^2$



(z.B. mit GTR: fnInt(Y_1-Y_2,X,-2.86,-2.38) nach vorheriger Eingabe von $f(x)$ und $g(x)$ im Y-Editor bei Y_1 bzw. Y_2)