e-Funktionen

Aufgaben und Lösungen

http://www.elearning-freiburg.de/

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion f durch

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}; \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit den Koordinatenachsen und alle Extrempunkte.

b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangente T und der Normalen N im Schnittpunkt S_x des Graphen von f mit der x-Achse.

c) Bestimmen Sie den Winkel α, unter dem der Graph von f die x-Achse schneidet.

Aufgabe 1 - Rest

d) Der Koordinatenursprung und die Schnittpunkte der Tangente T mit den Koordinatenachsen bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

e) Zeigen Sie, dass $F(x) = (-2x-8) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ eine Stammfunktion von f ist.
Bestimmen Sie die Fläche unter dem Graphen von f zwischen den beiden Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

$f(x) = (x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

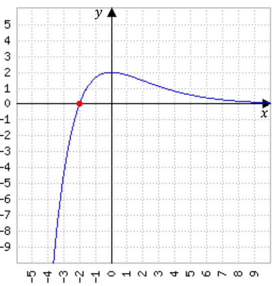
Lösung Aufgabe 1 a)

a) Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle)

Da $e^{-\frac{x}{2}} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = 0 \implies (x+2) = 0$$
$$\implies x = -2$$

Somit ist $S_x(-2|0)$ der (einzige) Schnittpunkt mit der x-Achse.



Schnittpunkt mit der y-Achse

Wegen $f(0) = (0+2) \cdot e^{-\frac{0}{2}} = 2$ ist $S_y(0|2)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse.

Lösung Aufgabe 1 a)

Extrempunkte

$$f'(x) = 1\cdot e^{-\frac{x}{2}} + (x+2)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(1-\tfrac{1}{2}(x+2)\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = -\tfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}} - \tfrac{1}{2}x\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Mit $f'(x) = -\frac{1}{2}x\cdot e^{-\frac{x}{2}} = 0$ folgt $x = 0$.

Dies ist unser einziger Kandidat für eine Extremstelle.

Lösung Aufgabe 1 a)

Mit $f''(0) = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 0\right)\cdot e^{-\frac{0}{2}} = -\frac{1}{2} < 0$ sehen wir, dass bei $x = 0$ ein Hochpunkt vorliegen muss.

Mit $f(0) = 2$ erhalten wir die y-Koordinate dieses Hochpunkts.

Somit ist $\underline{H(0|2)}$ die einzige Extremstelle von $f(x)$.

Lösung Aufgabe 1 b)

b) Tangenten- und Normalengleichung

Tangentengleichung an der Stelle x_0: $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

Mit $x_0 = -2$ folgt $f'(-2) = e$ und $f(-2) = 0$ und damit

$$T\colon\ \underline{y} = e\cdot(x+2) = \underline{ex + 2e}$$

Normalengleichung an der Stelle x_0: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

Es folgt

$$N\colon\ \underline{y} = -\frac{1}{e}\cdot(x+2) = \underline{-\frac{1}{e}x - \frac{2}{e}}$$

Lösung Aufgabe 1 c)

c) Schnittwinkel α mit der x-Achse

Die erste Ableitung von f an der Stelle x_0 ist bekanntlich der Tangens der Steigungswinkels in x_0, d.h. $f'(-2) = e = \tan\alpha$.

Mit dem Taschenrechner (beim GTR mit 2ND TAN) bestimmt man daraus α zu $\alpha = 69{,}8°$.

$S_x(-2|0)$
$T\colon\ y = ex + 2e$

Lösung Aufgabe 1 d)

d) Flächeninhalt des Tangentendreiecks

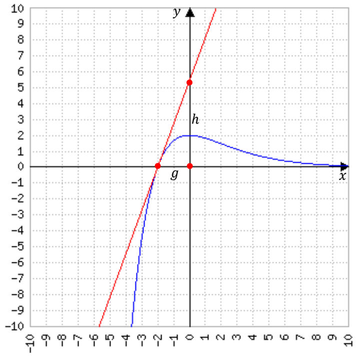
$A_\Delta = \frac{g \cdot h}{2}$

Wegen $S_x(-2|0)$ ergibt sich $g = 2$.

Setze $x = 0$ in T ein und erhalte $y = 2e$.

Dies ist der Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse also die Höhe h unseres Dreiecks. Somit ist $h = 2e$.

Folglich gilt $A_\Delta = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2e}{2} = 2e = 5{,}43$



Ergebnis: Das Tangentendreieck hat die Fläche $A = 5{,}43\ \mathrm{LE}^2$

$f(x) = (x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

Lösung Aufgabe 1 e)

e) Behauptung: $\boldsymbol{F(x) = (-2x-8) \cdot e^{-\frac{x}{2}}}$ sei eine Stammfunktion

Für den Beweis muss f lediglich einmal abgeleitet werden:

$$F'(x) = -2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} + (-2x-8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$
$$= \left(-2 + (-2x-8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = (x+2) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = f(x)$$

Fläche unterhalb des Graphen

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen liegen bei $x = -2$ und $x = 0$. Somit gilt:

$$A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = [F(x)]_{-2}^{0} = -8 + 4e \approx 2{,}87$$