Abiturprüfung Mathematik 2018 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

Pflichtteil

Lösungen

klaus_messner@web.de

Pflichtteil 2018

Aufgabe 1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$.

(2 VP)

Lösung:

Wir schreiben $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$ zunächst um in $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(x^2)$.
Unter Verwendung sowohl der Produkt- als auch der Kettenregel folgt dann

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(x^2) + x^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$= \underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x^2) + 2x\sqrt{x} \cdot \cos(x^2)}$$

Pflichtteil 2018

Aufgabe 2
Untersuchen Sie, ob der Wert des Integrals $\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}\,dx$ ganzzahlig ist.
(2,5 VP)

Lösung:

$$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}\,dx = [\ln|x-2|]_3^{e+2} = \ln|e+2-2| - \ln|3-2|$$

$$= \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Ergebnis: Der Wert des Integrals ist ganzzahlig.

Pflichtteil 2018

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$. F ist eine Stammfunktion von f.
Bestimmen Sie die Stelle, an der die Graphen von F und f parallele Tangenten besitzen.

(2,5 VP)

Lösung:

Wenn die Graphen von F und f parallele Tangenten haben, dann muss es solche Stellen x geben, so dass $F'(x) = f'(x)$ gilt. Nun ist $F'(x) = f(x)$ und $f'(x) = 8x - 4$.

An den Stellen mit paralleler Tangente muss also $4x^2 - 4x + 5 = 8x - 4$ gelten. Diese quadratische Gleichung lässt sich mit abc- oder der pq-Formel lösen:

Pflichtteil 2018

$4x^2 - 4x + 5 = 8x - 4 \qquad | -8x + 4$

$4x^2 - 12x + 9 = 0 \qquad | : 4$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$ |pq-Formel

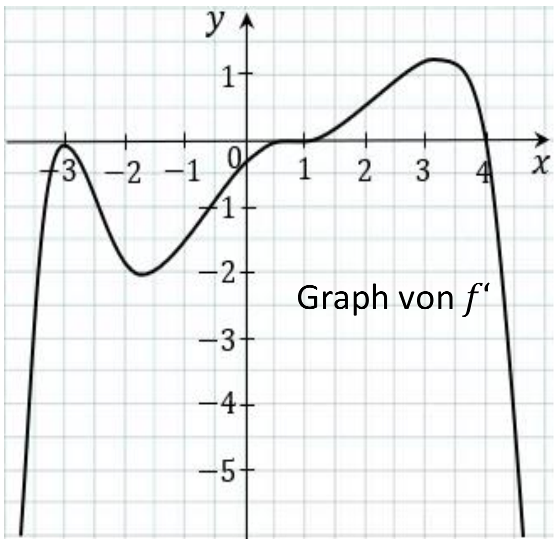
$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Ergebnis: An der Stelle $\underline{x = \frac{3}{2}}$ haben die beiden Graphen parallele Tangenten.

Pflichtteil 2018

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



(1) Im Bereich $-3{,}5 \leq x \leq 4{,}5$ besitzt f genau drei Extremstellen.

(2) Die Gleichung $f' = -\frac{1}{2}x$ hat im abgebildeten Bereich genau zwei Lösungen.

(3) Die Funktion f'' hat an der Stelle $x = -3$ einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten.

(3 VP)

Pflichtteil 2018

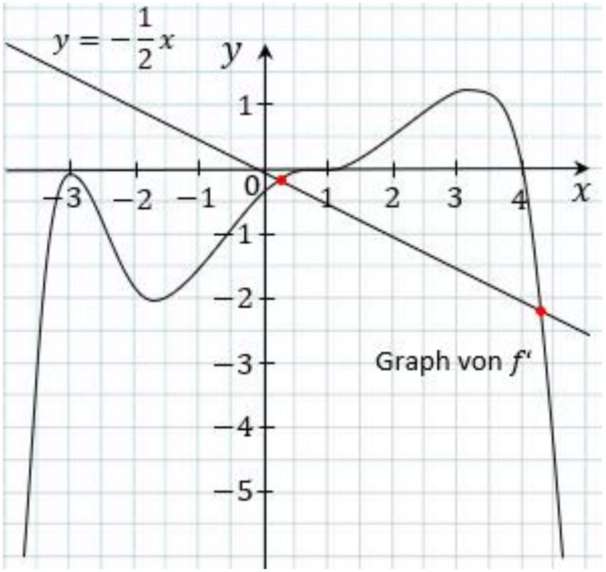
Lösung:

(1) Im genannten Bereich hat f' jeweils bei $x_1 = 1$ und bei $x_2 = 4$ einen Nulldurchgang mit Vorzeichenwechsel. Somit hat f nur an diesen beiden Stellen Extrempunkte.

Ergebnis: Die Aussage ist falsch.

(2) Wir zeichnen die Gerade $y = -\frac{1}{2}x$ einfach zusätzlich in das Koordinatensystem ein und sehen, dass diese Gerade mit dem Graphen von f' tatsächlich zwei Schnittpunkte hat.

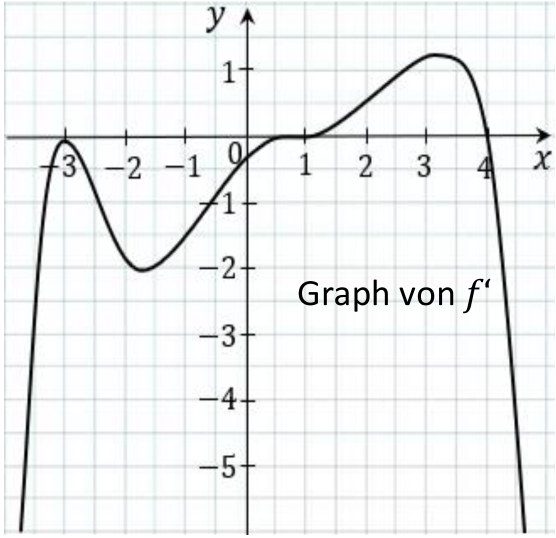
Ergebnis: Die Aussage ist wahr.



Pflichtteil 2018

(3) Links von $x = -3$ haben wir aufsteigende Tangenten, d.h. f" ist positiv.
Rechts von $x = -3$ haben wir absteigende Tangenten, d.h. f" ist negativ.
Folglich hat f" bei $x = -3$ einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten (wenn man die Stelle $x = -3$ von links nach rechts überquert).

Ergebnis: Die Aussage ist wahr.



Pflichtteil 2018

Aufgabe 5

Gegeben sind die Ebenen $E\colon\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$ und die Gerade

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Die Gerade g liegt in E.

a) Bestimmen Sie die Werte für a und b.

b) Geben Sie eine Gleichung einer Geraden h an, die ebenfalls in E liegt und senkrecht zur Geraden g verläuft.

(3,5 VP)

Pflichtteil 2018

$E\colon\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

Lösung a)

Wenn g in E liegt, dann gilt dies für jeden Wert von s, insbesondere auch für den Wert $s = 0$. Es reicht also, den Stützvektor von g in E einzusetzen, wodurch wir b erhalten:

$$2 \cdot 1 + 2b + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2b + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

Wir können nun s beliebig z.B. $s = 1$ wählen und mit $b = 1$ erhalten wir durch Einsetzen in E folgendes:

$$2(1+1) + 2 \cdot 1 + (1 + a) = 5$$

Daraus ergibt sich $4 + 2 + 1 + a = 5 \quad \Rightarrow \quad 7 + a = 5 \quad \Rightarrow \quad a = -2$

Ergebnis: Die gesuchten Werte lauten $\underline{a = -2}$ und $\underline{b = 1}$.

Pflichtteil 2018

$E\colon\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

Lösung b)

Gemäß den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) ist die Gerade nun vollständig gegeben durch $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Der Richtungsvektor einer Geraden h, die senkrecht zu g steht und gleichzeitig in E liegt, muss sowohl senkrecht zum Richtungsvektor von g als auch senkrecht zum Normalenvektor von E verlaufen. Es müssen also folgende beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$\text{I. } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \text{ und II. } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Pflichtteil 2018

$E\colon\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

Wenn wir beide Skalarprodukte ausmultiplizieren, erhalten wir
$\mathrm{I.}\ a - 2c = 0$ und $\mathrm{II.}\ 2a + 2b + c = 0$.

Wir formen die erste Gleichung um zu $\mathrm{I.}\ a = 2c$, setzen dies in die zweite Gleichung ein und erhalten $\mathrm{II.}\ 2b + 5c = 0$.

Übrig bleibt eine Gleichung mit zwei Unbekannten, von denen wir eine frei wählen können, z.B. $c = 2$.

Daraus ergibt sich nach Umstellung $b = -5$ und durch Einsetzen in Gleichung $\mathrm{I.}\ a = 4$. Damit haben wir einen Richtungsvektor für die Gerade h. Als Stützvektor können wir einen beliebigen Punkt aus E wählen, beispielsweise den Stützvektor von g. Damit haben wir ein

Ergebnis: Die gesuchte Gerade h ist gegeben durch $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pflichtteil 2018

Aufgabe 6

Gegeben ist die Ebene E: $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$.

a) Begründen Sie, dass die Spurpunkte von E die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.

b) Die Ebene F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

(3,5 VP)

Pflichtteil 2018

$E\colon\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

Lösung a)

Wenn man jeweils zwei Koordinaten Null setzt und die Ebenengleichung nach der dritten Koordinate auflöst, erhält man die Spurpunkte.

Beispielsweise setzen wir $x_2 = x_3 = 0$ und erhalten $x_1 = 4$ und damit den Spurpunkt $S_1(4|0|0)$. Analog erhalten wir $S_2(0|2|0)$ und $S_3(0|0|-4)$.

Die Seiten S_1S_2 und S_2S_3 sind zwei Seiten eines Dreiecks mit den Längen

$$\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

$$\left|\overrightarrow{S_2S_3}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Pflichtteil 2018

Mit $\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right| = \left|\overrightarrow{S_2S_3}\right| = \sqrt{20}$ sehen wir, dass die Behauptung, das Dreieck $S_1S_2S_3$ gleichschenklig sei, korrekt ist.

Pflichtteil 2018

$$E:\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$F:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung b)

Wir wandeln zunächst die Parameterform von F um in die Koordinatenform. Der Normalenvektor ergibt sich dabei aus dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren, welches wir wie gewohnt nach dem „Schnürsenkelprinzip" ausrechnen

$$\begin{array}{cc} \cancel{2} & \cancel{1} \\ 3 & 2 \\ 8 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ \cancel{8} & \cancel{0} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 0 \\ 8 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Pflichtteil 2018

$E\colon\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

$F\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit folgt $F\colon\ -16x_1 + 8x_2 + x_3 = d$ mit noch unbekanntem d.

Da der Stützvektor von F auf einen Punkt in F zeigt, können wir diesen in die Koordinatenform einsetzen und erhalten d:

$$-16 \cdot (-2) + 8 \cdot (-2) + 0 = 16 = d$$

Damit haben wir die Koordinatenform für F komplett:

$$F\colon\ -16x_1 + 8x_2 + x_3 = 16$$

Wir schreiben nun beide Ebenengleichungen untereinander, und lösen das lineare Gleichungssystem.

$$\text{I.}\quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$\text{II.}\ -16x_1 + 8x_2 + x_3 = 16$$

Wir wählen $x_3 = t$ und setzen dies in das Gleichungssystem ein:

Pflichtteil 2018

$$\text{I.}\quad x_1 + 2x_2 = 4 + t$$
$$\text{II.}\ -16x_1 + 8x_2 = 16 - t$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 4 und ziehen die zweite ab.

Es folgt $20x_1 = 5t$ und weiter $x_1 = \frac{5}{20}t = \frac{1}{4}t$. Einsetzen in II. :

$$-16 \cdot \frac{1}{4}t + 8x_2 = 16 - t \;\Rightarrow\; -4t + 8x_2 = 16 - t$$
$$\Rightarrow\;\; 8x_2 = 16 + 3t \;\;\Rightarrow\;\; x_2 = 2 + \frac{3}{8}t$$

Die gefundenen Ausdrücke für x_1, x_2 und x_3 schreiben wir als Vektor und erhalten daraus eine Parameterform der Schnittgeraden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ 2 + \frac{3}{8}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pflichtteil 2018

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{}{4} \\ 3 \\ \frac{}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da es auf die Länge des Richtungsvektors nicht ankommt multiplizieren wir noch mit 8 und erhalten dadurch „schönere" Zahlen.

Ergebnis: Eine Parameterform der Schnittgeraden der Ebenen E und F ist gegeben durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Pflichtteil 2018

Aufgabe 7

Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei verschiedene Augenzahlen fallen.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine „1“ und eine „2“?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen die Würfel zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

(3 VP)

Pflichtteil 2018

Lösung

a) Für die erste Zahl gibt es 6 von 6 Möglichkeiten, aber für die zweite Zahl nur noch 5 von 6 Möglichkeiten, da die zweite Zahl von der ersten Zahl verschieden sein soll. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit gegeben durch $P(\text{zwei verschiedene Zahlen}) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} = \underline{\frac{5}{6}}$.

b) Eine „1" und eine „2" wird durch die Paare $(1{,}2)$ und $(2{,}1)$ realisiert. Das sind 2 von insgesamt 36 möglichen Paaren. Mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(\text{eine „1" und eine „2"}) = \frac{2}{36} = \underline{\frac{1}{18}}$.

Pflichtteil 2018

c) Das Ereignis „zwei aufeinanderfolgende Zahlen“ wird realisiert durch die Paare $(1{,}2)$, $(2{,}3)$, $(3{,}4)$, $(4{,}5)$ und $(5{,}6)$.
Da die zwei Würfel zusammen geworfen werden, spielt die Reihenfolge der Ziffern aber keine Rolle, d.h. dass auch die Paare $(2{,}1)$, $(3{,}2)$, $(4{,}3)$, $(5{,}4)$ und $(6{,}5)$ zwei aufeinanderfolgende Zahlen darstellen!
Insgesamt haben wir 10 von insgesamt 36 Paaren.
Die Wahrscheinlichkeit ist demnach gegeben durch
$P(\text{„zwei aufeinanderfolgende Zahlen“}) = \frac{10}{36} = \underline{\frac{5}{18}}.$