Abiturprüfung Mathematik 2018 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

Wahlteil Analysis A2

Lösung der Aufgaben

A 2.1 und A 2.2

klaus_messner@web.de

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Aufgabe A 2.1

Ein Klimaforscher beschreibt die Entwicklung der globalen Durchschnitts-temperatur modellhaft durch die Funktion f mit

$$f(t) = 2{,}8 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1;\ 0 \leq t \leq 200$$

Dabei gibt t die Zeit in Jahren seit Beginn des Jahres 1900 und $f(t)$ die globale Durchschnittstemperatur in Grad Celsius an.
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben anhand dieses Modells.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

a) Geben Sie die globale Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 1900 an.
Geben Sie die niedrigste globale Durchschnittstemperatur seit 1900 an.
In welchem Jahr wird die globale Durchschnittstemperatur $16{,}0\ °C$ überschreiten?
Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000.
Bestimmen Sie den Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur im durch die Modellierung beschriebenen Zeitraum.

(4,5 VP)

Wahlteil 2018 – Analysis A2

b) Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t+10) - f(t) = 0{,}5$ führt.
Nachdem die globale Durchschnittstemperatur ihren niedrigsten Wert erreicht hat, steigt sie immer weiter an.
Zeigen Sie, dass dieser Anstieg immer schneller verläuft.

(3,5 VP)

c) Es werden Klimaschutzmaßnahmen geplant. Greifen diese zum Zeitpunkt t_0, so bleibt die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur konstant bei dem Wert, der durch das Modell des Klimaforschers für t_0 vorausgesagt wird.
Bestimmen Sie den spätesten Zeitpunkt t_0, zu dem die Maßnahmen greifen müssen, damit die globale Durchschnittstemperatur $15{,}7$ °C bis zum Beginn des Jahres 2050 nicht überschreiten wird.

(3 VP)

Wahlteil 2018 – Analysis A2

d) Infolge alternativer Klimaschutzmaßnahmen kann der Verlauf der globalen Durchschnittstemperatur ab Beginn des Jahres 2020 durch beschränktes Wachstum modelliert werden.
Der Graph der zugehörigen Funktion g schließt sich dabei ohne Knick an den Graphen der Funktion f an. Außerdem stellt sich nach diesem neuen Modell langfristig eine globale Durchschnittstemperatur von $16{,}8\ °C$ ein.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g.

(4 VP)

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Aufgabe A 2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = -ax^4 + 4ax^2$ gegeben.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_a achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Zeigen Sie, dass die Nullstellen der Funktion f_a unabhängig von a sind.

(2 VP)

b) Sowohl der Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{32}{15}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ als auch der Graph von f_a schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche mit der x-Achse ein.
Bestimmen Sie a so, dass beide Flächen den gleichen Inhalt haben.

(3 VP)

Wahlteil 2018 – Analysis A2

$f(t) = 2{,}8 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1$

Lösung Aufgabe A 2.1

a) Globale Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 1900

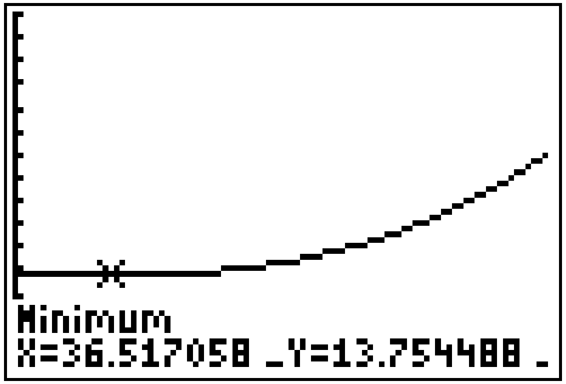
Für das Jahr 1900 ist $t = 0$. Somit haben wir $f(0) = 13{,}9$.

Ergebnis: Zu Beginn des Jahres 1900 betrug die globale Durchschnittstemperatur $\underline{13{,}9\ °\text{C}}$.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Niedrigste globale Durchschnittstemperatur seit 1900

Geben Sie den Funktionsterm von $f(t)$ im GTR bei Y_1 ein und lassen Sie sich den Graphen z.B. im x-Intervall $[0; 200]$ und im y-Intervall $[10; 25]$ zeichnen. Mit `2ND CALC minimum` erhalten Sie den niedrigsten Wert der globalen Durchschnittstemperatur bei $t = 36{,}5$ mit einer Temperatur von $13{,}75\ °\mathrm{C}$.

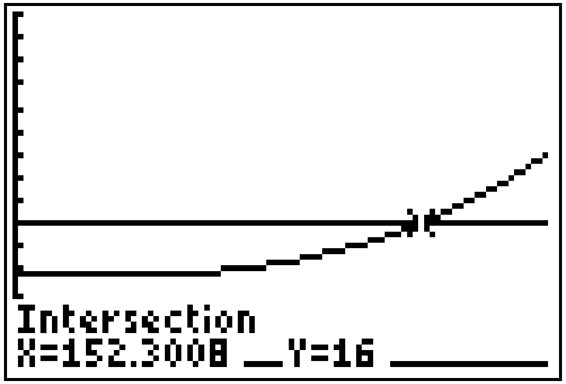


Ergebnis: Die niedrigste globale Durchschnittstemperatur im Betrachtungszeitraum liegt bei $\underline{13{,}75\ °\mathrm{C}}$.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Jahr in dem die globale Durchschnittstemperatur $\mathbf{16,0}$ °C überschreitet

Geben Sie hierzu bei Y_2 im GTR den Wert 16 ein und lassen Sie sich anschließend beide Graphen zeichnen.
Mit 2ND CALC intersect bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen bei $t = 152{,}3$.
Dies entspricht dem Jahr 2052.

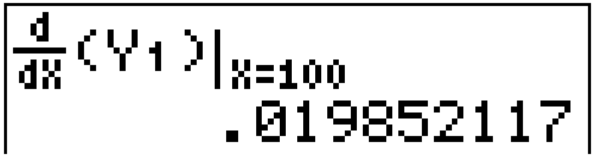


Ergebnis: Im Verlaufe des Jahres 2052 wird die globale Durchschnitts-temperatur 16 °C überschreiten.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000

Die momentane Änderungsrate ist gegeben durch $f'(t)$ und das Jahr 2000 entspricht $t = 100$. Wir bestimmen demnach $f'(100)$ und erhalten mit dem GTR den ungefähren Wert 0,02.



Ergebnis: Die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnitts-temperatur beträgt im Jahr 2000 etwa 0,02 °C pro Jahr.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

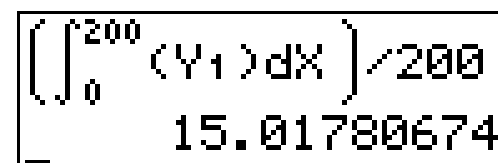
Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur

Wir verwenden die Integralformel für Mittelwerte, nämlich
$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Der Betrachtungszeitraum beginnt bei $t = a = 0$ und endet bei $t = b = 200$.

Somit haben wir $m = \frac{1}{200}\int_0^{200} f(t)dt$.

Der GTR liefert den ungefähren Wert $15{,}02\,°\mathrm{C}$.



Ergebnis:

Die mittlere globale Durchschnittstemperatur liegt im Betrachtungszeitraum bei etwa $\underline{15{,}02\,°\mathrm{C}}$.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

b) Formulierung der Fragestellung

Die Gleichung $f(t+10) - f(t) = 0{,}5$ beschreibt einen Temperaturunterschied von $0{,}5\ °\mathrm{C}$.

Der Unterschied zwischen den beiden betrachteten Zeitpunkten t und $t + 10$ beträgt 10 Jahre.

Eine entsprechende Aufgabenstellung sollte also wie folgt lauten:

Bestimmen Sie den Startzeitpunkt eines zehnjährigen Zeitraums, in dem die globale Durchschnittstemperatur um $0{,}5\ °\mathrm{C}$ steigt.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Nachweis des sich beschleunigenden Anstiegs

Nachzuweisen, dass der Anstieg der globalen Durchschnittstemperatur immer schneller wird, bedeutet, dass wir $f''(t) > 0$ zeigen müssen, denn f' steht für die momentane Änderungsrate und f'' für die momentane Änderungsrate von f' also für den „Anstieg des Anstiegs".

Mit $f(t) = 2{,}8 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1$ folgt

$$f'(t) = 0{,}008 \cdot 2{,}8 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03 = 0{,}0224 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03$$

und weiter

$$f''(t) = 0{,}008 \cdot 0{,}0224 \cdot e^{0{,}008t} = 0{,}0001792 \cdot e^{0{,}008t}$$

Für $t > 36{,}5$ gilt $f'(t) > 0$ und $f''(t) > 0$ gilt für alle t.

Damit ist der Nachweis erbracht.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

c) Spätester Zeitpunkt t_0

Die vom Klimamodell zum Zeitpunkt t_0 vorausgesagte momentane Änderungsrate ist $f'(t_0)$.

Wenn f' ab dem Zeitpunkt t_0 konstant bleiben soll, so geht der Graph von f ab diesem Zeitpunkt in eine Gerade über.

Laut Aufgabenstellung muss diese Gerade im Jahr 2050, also zum Zeitpunkt $t = 150$, die y-Koordinate $15{,}7$ haben.

Wir gehen nun von der allgemeinen Geradengleichung $y = mx + c$ aus, setzen für x den Wert 150, für y den Wert $15{,}7$ und für die Steigung m den Ausdruck $f'(t_0)$ ein und erhalten

$$\text{I. } 15{,}7 = f'(t_0) \cdot 150 + c$$

I. $15{,}7 = f‘(t_0) \cdot 150 + c$

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Wir wissen außerdem, dass die Gerade zum Zeitpunkt t_0 „beginnt" und dass zu diesem Zeitpunkt gemäß dem Klimamodell die Temperatur $f(t_0)$ herrscht. Wir setzen wieder die entsprechenden Ausdrücke in die Geradengleichung ein und erhalten

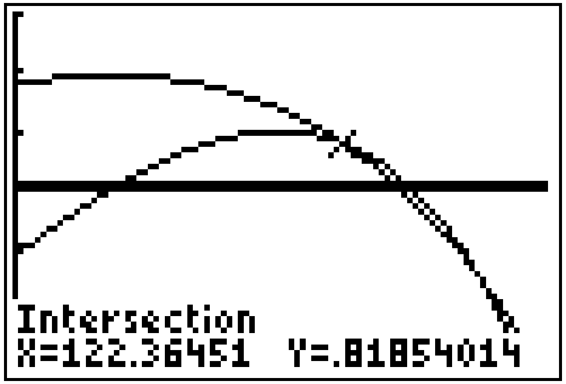
$$\text{II. } f(t_0) = f‘(t_0) \cdot t_0 + c$$

Wenn wir beide Gleichungen voneinander abziehen, fällt c heraus und wir erhalten eine Gleichung, in der t_0 die einzige Unbekannte ist, nach der wir (mit dem GTR) auflösen können. Mit I. – II. folgt:

$$15{,}7 - f(t_0) = f‘(t_0) \cdot (150 - t_0)$$

Geben Sie nun die linke Seite der Gleichung bei Y_2 und die rechte Seite bei Y_3 im GTR ein und lassen Sie sich beide Graphen im x-Intervall $[0; 200]$ und y-Intervall $[-3; 3]$ zeichnen.

Wahlteil 2018 – Analysis A2



Mit 2ND CALC intersect finden Sie zwei Schnittpunkte, nämlich bei $x \approx 122{,}4$ und bei $x \approx 174{,}1$.
Der rechte Schnittpunkt bei $x \approx 174{,}1$ entspricht dem Jahr 2074 und liegt somit nach dem Jahr 2050.
Daher kommt nur der erste Schnittpunkt bei $x \approx 122{,}4$ als Lösung in Betracht.

Ergebnis: Der gesuchte späteste Zeitpunkt liegt bei $t_0 \approx 122{,}4$ also etwa Mitte des Jahres 2022.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

d) Funktionsterm für g

Formel für beschränktes Wachstum: $B(t) = S - ce^{-kt}$ (S ist die obere Schranke und $S - c$ der „Anfangsbestand" zum Zeitpunkt $t = 0$)

Da die Temperatur auf lange Sicht bei 16,8 °C liegen soll, ist $S = 16{,}8$. Somit haben wir bereits $g(t) = 16{,}8 - ce^{-kt}$.

Im neuen Klimamodell haben wir zum Zeitpunkt $t = 0$ die globale Durchschnittstemperatur $g(0) = 16{,}8 - c$. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht im alten Klimamodell dem Jahr 2020 also dort dem Wert $t = 120$ und damit der globalen Durchschnittstemperatur $f(120) \approx 14{,}8$. Somit gilt $14{,}8 = 16{,}8 - c$ woraus sich $c = 2$ ergibt.

Inzwischen haben wir $g(t) = 16{,}8 - 2e^{-kt}$.

$f(t) = 2{,}8 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1$
$g(t) = 16{,}8 - 2e^{-kt}$

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Inzwischen haben wir $g(t) = 16{,}8 - 2e^{-kt}$.

Laut Aufgabenstellung geht zu Beginn des Jahres 2020 der Graph von f ohne Knick in den Graphen von g über, folglich muss $f'(120) = g'(0)$ gelten.

Mit dem GTR erhalten wir $f'(120) = 0{,}0285$.

Mit $g'(t) = 2ke^{-kt}$ folgt $g'(0) = 2k$ und damit $0{,}0285 = 2k$ also $k \approx 0{,}01425$.

Ergebnis: Der gesuchte Funktionsterm lautet $\underline{g(t) = 16{,}8 - 2e^{-0{,}01425t}}$, wobei t in Jahren seit 2020 gemessen wird.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Lösung Aufgabe A 2.2

a) Achsensymmetrie

Achsensymmetrie (zur y-Achse) weist man mit dem Kriterium $f(-x) = f(x)$ nach. Es gilt $f_a(-x) = -a(-x)^4 + 4a(-x)^2 = -ax^4 + 4ax^2 = f_a(x)$ und das war zu zeigen.

Unabhängigkeit der Nullstellen vom Parameter $\boldsymbol{a}$

In $-ax^4 + 4ax^2 = 0$ klammern wir ax^2 aus und erhalten $ax^2(-x^2 + 4) = 0$. Daraus ist sofort $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ oder $x_3 = -2$ ersichtlich. In keiner der Lösungen kommt der Parameter a vor, folglich sind die Nullstellen, wie behauptet, unabhängig von a.

Wahlteil 2018 – Analysis A2

b) Bestimmung des Parameters $\boldsymbol{a}$

Zunächst einmal stellen wir fest, dass die Nullstellen der Funktion $g(x)$ im Intervall $[0; 2]$ bei $x = 0$ und bei $x = 2$, also genau an den Rändern, liegen. Dazwischen gibt es keine weiteren Nullstellen.

Somit ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $g(x)$ und der x-Achse durch das Integral $A = \int_0^2 g(x)dx$ gegeben. Wir könnten nun den Wert der Fläche mit dem GTR berechnen, wählen jedoch den exakten Weg und bestimmen das Integral „per Hand". Es folgt

$$A = \int_0^2 \frac{32}{15}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[-\frac{32}{15}\pi \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^2 = \left[-\frac{64}{15} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^2$$

$$= \left(-\frac{64}{15} \cdot \cos(\pi)\right) - \left(-\frac{64}{15} \cdot \cos(0)\right) = \frac{64}{15} + \frac{64}{15} = \frac{128}{15}$$

$f_a(x) = -ax^4 + 4ax^2$
$A = \frac{128}{15}$

Wahlteil 2018 – Analysis A2

Die Nullstellen der Funktion f_a liegen bei $x = 0$ und $x = 2$ (siehe Teilaufgabe a)). Gesucht ist somit ein Wert für a, so dass $A = \int_0^2 f_a(x)dx = \frac{128}{15}$ ist.
Es folgt

$$\frac{128}{15} = \int_0^2 f_a(x)dx = \int_0^2 (-ax^4 + 4ax^2)dx = \left[-\frac{1}{5}ax^5 + \frac{4}{3}ax^3\right]_0^2$$
$$= \left(-\frac{1}{5}a \cdot 2^5 + \frac{4}{3}a \cdot 2^3\right) - 0 = -\frac{32}{5}a + \frac{32}{3}a = -\frac{96}{15}a + \frac{160}{15}a = \frac{64}{15}a$$

Demnach ist $\frac{128}{15} = \frac{64}{15}a$ bzw. $a = 2$.

Ergebnis:
Für den Wert $\underline{a = 2}$ schließen die beiden Graphen von f_a und g im Intervall $[0; 2]$ denselben Flächeninhalt mit der x-Achse ein.