Abiturprüfung Mathematik 2018 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

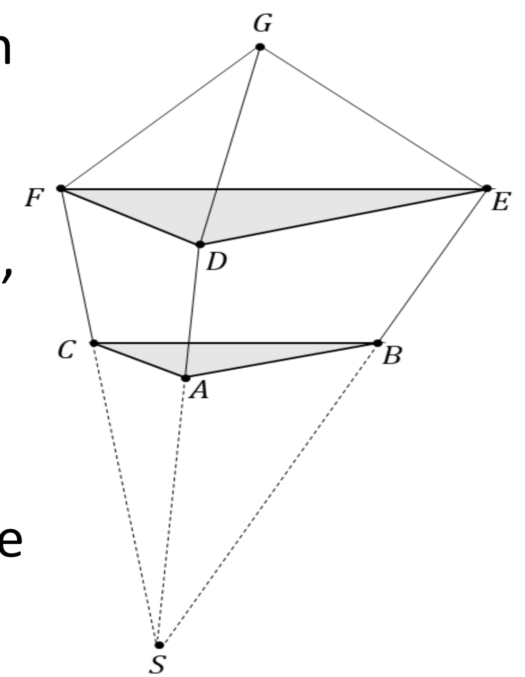
Wahlteil Analytische Geometrie B1

Lösung der Aufgabe B 1

Wahlteil 2018 – Aufgabe B 1

Aufgabe B 1

Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper $ABCDEFG$ dargestellt werden.
Die obere Etage des Museums entspricht dabei der Pyramide $DEFG$, die untere Etage dem Körper $ABCDEF$, der Teil der Pyramide $DEFS$ ist. Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die Horizontale.
Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene.
In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte $A(-5|5|0)$, $B(-5|25|0)$, $D(0|0|15)$, $E(0|30|15)$, $F(-25|5|15)$, $G(-10|10|35)$.



Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

Wahlteil 2018 – Aufgabe B 1

a) Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.
Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad r = s = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } S(-15|15|-30)$$

Erläutern Sie die Schritte des dargestellten Vorgehens.

(3,5 VP)

Wahlteil 2018 – Aufgabe B 1

b) Berechnen Sie den Inhalt der Bodenfläche der oberen Etage.
Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für jeweils $100\ \mathrm{m}^3$ Rauminhalt eine elektrische Leistung von $0{,}8$ Kilowatt benötigt.
Weisen Sie nach, dass zur Entfeuchtung der Luft eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

(3 VP)

Wahlteil 2018 – Aufgabe B 1

c) An einer Metallstange, deren Enden durch die Punkte G und $R(-5|5|15)$ dargestellt werden, ist ein Scheinwerfer befestigt, der sich entlang der Stange verschieben lässt.
Die Größe des Scheinwerfers soll vernachlässigt werden.
Der Scheinwerfer soll aus einer Entfernung von $8\ \mathrm{m}$ diejenige Wand beleuchten, die im Modell durch das Dreieck EFG dargestellt wird.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.

(3,5 VP)

$D(0|0|15)$
$E(0|30|15)$
$F(-25|5|15)$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

a) Nachweis, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist
Die Verbindungsvektoren, welche die Kanten der oberen Etage beschreiben sind:

$$\overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bilden nun die verschiedenen Skalarprodukte und prüfen, ob eines davon Null ist.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = 25 \cdot 25 - 5 \cdot 25 = 21 \cdot 25 \neq 0$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = -150 \neq 0$$

$$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 25 \cdot 30 \neq 0$$

Wie man sieht sind die Skalarprodukte jeweils nicht Null, d.h. an keinem der Eckpunkte D, E oder F liegt ein rechter Winkel.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

$A(-5|5|0)$, $B(-5|25|0)$
$D(0|0|15)$, $E(0|30|15)$

Erläuterung der Rechnung

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\-15\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=s=3$$

Auf der linken Seite der ersten Gleichung steht die Geradengleichung für die Gerade g durch die Punkte D und A mit $\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor.

Auf der rechten Seite steht die Geradengleichung für die Gerade h durch die Punkte E und B mit $\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{EB}=\begin{pmatrix}-5\\25\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\-15\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}$, d.h. $S(-15|15|-30)$

Löst man das entsprechende Gleichungssystem, so führt dies auf die Parameterwerte $r = s = 3$. Setzt man den Parameterwert $r = 3$ in g ein (zweite Gleichung), so erhält man den Schnittpunkt S der beiden Geraden.

b) Inhalt der Fläche der oberen Etage

Die obere Etage wird durch das Dreieck DEF gebildet. Die Fläche eines Dreiecks ist durch $A = \frac{1}{2}gh$ gegeben, wobei g die Länge der Grundseite und h die Höhe des Dreiecks darstellt. In unserem Fall verwenden wir als Grundseite die Strecke FE und erhalten damit

$$g = |\overrightarrow{FE}| = \left|\begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25 \cdot \sqrt{2}$$

$D(0|0|15)$
$E(0|30|15)$
$F(-25|5|15)$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

Die Höhe h ist gegeben durch den Abstand des Punktes D zur Geraden durch die Punkte F und E.
Wir verwenden zur Berechnung das aus der schule bekannte Verfahren.
Zuerst bilden wir eine Hilfsebene H, die senkrecht zur Geraden h durch F und E liegt, so dass der Punkt D in H liegt. Der Normalenvektor von H ist dann $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da es auf die Länge des Normalenvektors nicht ankommt, teilen wir durch 25 und erhalten $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Somit haben wir $H\colon\ x_1 + x_2 = d$ mit noch unbekanntem d. Da D in H liegen soll, setzen wir D ein und erhalten $0 + 0 = 0 = d$ und somit $H\colon\ x_1 + x_2 = 0$.

$D(0|0|15)$
$E(0|30|15)$
$F(-25|5|15)$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

Die Gerade h durch F und E ist gegeben durch $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Den Schnittpunkt S von H mit h erhalten wir durch Einsetzen von h in H:

$(-25 + 25t) + (5 + 25t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 50t - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{5}$.

Einsetzen von $t = \frac{2}{5}$ in h: $\begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$ also $S(-15|15|15)$.

Dies liefert die Höhe des Dreiecks DEF als Länge der Verbindung von D nach S mit

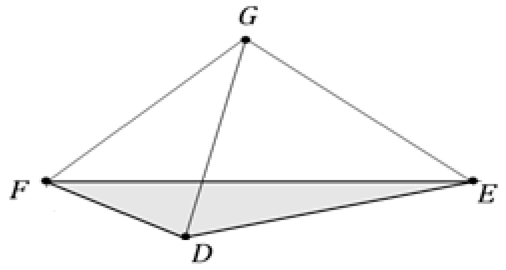
$$h = \left|\overrightarrow{DS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-15)^2 + 15^2} = 15 \cdot \sqrt{2}$$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

Schließlich haben wir $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \sqrt{2} \cdot 15 \cdot \sqrt{2} = 25 \cdot 15 = 375.$

Ergebnis: Die Fläche der oberen Etage misst 375 m².

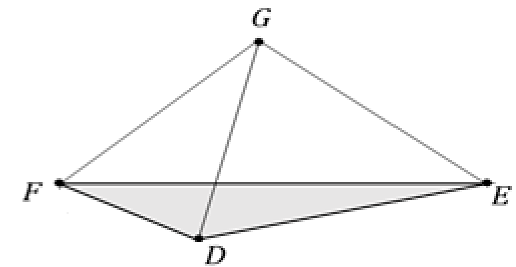
Nachweis, dass für die Luftentfeuchtung eine Leistung von 25 Kilowatt ausreicht



Das obere Stockwerk ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. Das Volumen der Pyramide berechnet sich durch $V = \frac{1}{3}Ah$, wobei A die Grundfläche und h die Höhe der Pyramide ist. $A = 375$ haben bereits. Die Höhe der Pyramide ist der Abstand des Punktes G zur Grundfläche. Wir bestimmen zunächst die Koordinatenform der Ebene, in der die Grundfläche liegt.

$D(0|0|15)$
$E(0|30|15)$
$F(-25|5|15)$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

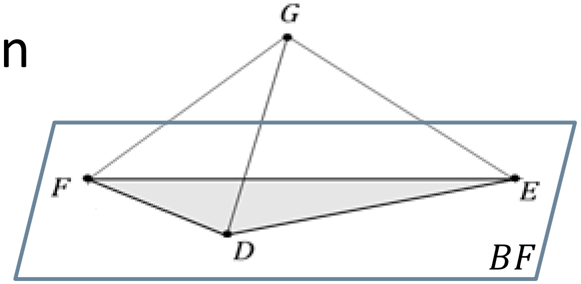


Aus dem Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir einen Normalenvektor der Ebene. Da es auf die Länge der beteiligten Vektoren nicht ankommt, teilen wir jeweils durch 5 und vereinfachen dadurch die folgenden Rechnungen. Wir haben also $\overrightarrow{FD}_{neu} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{FE}_{neu} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

und folglich $\begin{pmatrix} \cancel{5} & \cancel{5} \\ -1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \\ -1 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Division durch 30 liefert den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

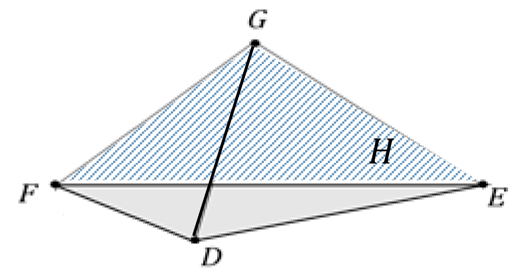


Für die Ebene BF in der die Bodenfläche liegt haben nun $BF\colon\ x_3 = d$ mit noch unbekanntem d.
Da beispielsweise $D(0|0|15)$ in BF liegt, erhalten wir durch Einsetzen $BF\colon\ x_3 = 15$.
Daraus ergibt sich nun die Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung mit $HNF\ BF\colon \frac{x_3-15}{1} = x_3 - 15 = 0$.
Damit bekommen wir schließlich durch Einsetzen des Punktes G den Abstand zur Bodenfläche: $d(G, BF) = |35 - 15| = 20$. Somit ist $h = 20$ die Höhe der Pyramide und wir erhalten $V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot 375\mathrm{m}^2 \cdot 20\mathrm{m} = 125\mathrm{m}^2 \cdot 20\mathrm{m} = 2500\mathrm{m}^3$. Laut Aufgabe wird für die Entfeuchtung von $100\mathrm{m}^3$ Luft $0{,}8\ \mathrm{KW}$ Leistung benötigt. Für $2500\mathrm{m}^3$ sind es $0{,}8\ \mathrm{KW} \cdot 25 = 20\ \mathrm{KW}$.

Damit ist der Nachweis erbracht, dass für die Entfeuchtung der Luft im oberen Stockwerk 25 KW Leistung ausreichen.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

c) Koordinaten des Scheinwerfers



Der Scheinwerfer bewegt sich auf der Geraden h durch die Punkte $G(-10|10|35)$ und $R(-5|5|15)$.

Eine Geradengleichung für h ist $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-10\\10\\35\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5\\-5\\-20\end{pmatrix}$.

Die Koordinaten des Scheinwerfers sind $K(-10+5t|10-5t|35-20t)$.

Wir brauchen noch eine Koordinatengleichung der Ebene H, in der die Seitenwand EFG des Gebäudes liegt.

Mit $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix}25\\25\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}15\\5\\20\end{pmatrix}$ haben wir bereits zwei Richtungsvektoren.

Da es auf die Länge der Vektoren nicht ankommt, teilen wir den ersten durch 25 und den zweiten durch 5 und bilden damit das Vektorprodukt, wodurch wir anschließend einen Normalenvektor erhalten

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{3} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ \cancel{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da es auch hier nicht auf die Länge ankommt, teilen wir durch -2 und erhalten den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Länge des Normalenvektors ist $|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.
Damit ergibt sich $H\colon -2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$.
Der Punkt $E(0|30|15)$ liegt in H. Nach Einsetzen folgt $-2 \cdot 0 + 2 \cdot 30 + 15 = 75 = d$ und wir haben $H\colon -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 75$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

$H\colon -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 75$

Die Hesse'sche Normalenform von H ist dann

$$HNF\ H\colon \frac{-2x_1 + 2x_2 + x_3 - 75}{3} = 0$$

Den Abstand des Scheinwerfers K zu H erhalten wir durch Einsetzen der Koordinaten von K wie folgt:

$$\begin{aligned} d(K,H) &= \frac{|-2(-10+5t) + 2(10-5t) + (35-20t) - 75|}{3} \\ &= \frac{|20 - 10t + 20 - 10t + 35 - 20t - 75|}{3} = \frac{|-40t|}{3} \end{aligned}$$

Laut Aufgabe soll der Abstand den Wert 8 haben.

Es folgt $\frac{|-40t|}{3} = 8$ und nach Multiplikation mit 3 folgt weiter $|-40t| = 24$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B 1

$|-40t| = 24$
$K(-10+5t|10-5t|35-20t)$

Falls $t \geq 0$, können wir die Betragsstriche nur weglassen, wenn wir das Vorzeichen umdrehen. Es folgt $40t = 24$ und damit $t = \frac{3}{5}$.

Da sich der Scheinwerfer nur zwischen den Punkten G und R befinden kann, kann der Parameter t nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen.

Der eben gefundene Wert ist demnach ein gültiger Wert. Aus dem Grund können wir uns auch die Untersuchung des zweiten Falls $t < 0$ ersparen. Somit ist $t = \frac{3}{5}$ der einzige gültige Wert und durch Einsetzen erhalten wir $K\left(-10+5\cdot\frac{3}{5}\middle|10-5\cdot\frac{3}{5}\middle|35-20\cdot\frac{3}{5}\right)$ also $K(-7|7|23)$.

Ergebnis: Damit der Abstand des Scheinwerfers K zur Seitenwand EFG den Wert 8 hat, muss K am Punkt $\underline{(-7|7|23)}$ befestigt sein.