Abiturprüfung Mathematik 2018 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

Wahlteil Analytische Geometrie B2

Lösung der Aufgabe B 2

klaus_messner@web.de

Wahlteil 2018 – Aufgabe B2

Aufgabe B 2

Gegeben sind die Ebenen $E: 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ und $F: 2x_1 + x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Zeigen Sie, dass E nicht orthogonal zu F ist.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F.

(3 VP)

Wahlteil 2018 – Aufgabe B2

Die Ebenen E und F gehören zur Ebnenschar E_a: $ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$, $a \in \mathbb{R}$.

b) Geben Sie an, für welche Werte von a die zugehörige Ebene E_a alle drei Koordinatenachsen schneidet.
Für diese Werte von a bilden die Spurpunkte von E_a zusammen mit dem Koordinatenursprung die Eckpunkte einer Pyramide.
Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass das Pyramidenvolumen 6 VE beträgt.

(4 VP)

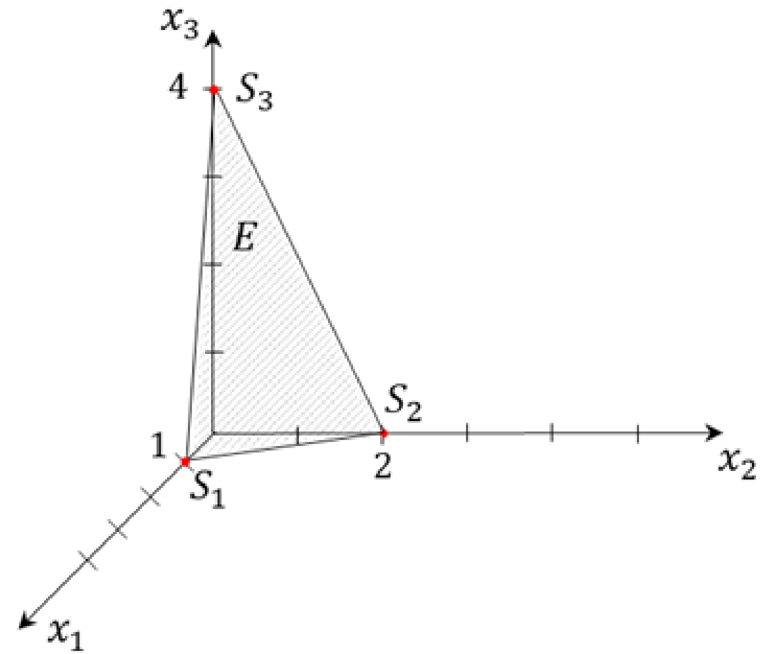
c) Bestimmen Sie den Wert für a so, dass der Abstand von $P(0|0|1)$ zu E_a maximal ist.
Begründen Sie, dass die Schar keine zueinander parallele Ebenen enthält.

(3 VP)

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$E: 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

a) Darstellung von E im Koordinatensystem



Wir bestimmen zunächst die Spurpunkte, also die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen.
Dabei werden bekanntlich immer zwei Koordinaten Null gesetzt und nach der dritten Koordinate aufgelöst.
Wir erhalten $S_1(1|0|0)$, $S_2(0|2|0)$ und $S_3(0|0|4)$.
Damit verdeutlichen wir die Lage von E im Koordinatensystem.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$E: 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$
$F: 2x_1 + x_3 = 4$

Behauptung $\boldsymbol{E}$ ist nicht orthogonal zu $\boldsymbol{F}$

Wenn das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren Null ist, stehen die Ebenen senkrecht zueinander.

Mit $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 9 \neq 0$.

Damit ist gezeigt, dass E nicht orthogonal zu F ist.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$E: 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$
$F: 2x_1 + x_3 = 4$

Schnittgerade s der Ebenen E und F

Wir schreiben die Koordinatengleichungen der beiden Ebenen untereinander und betrachten dies als ein lineares Gleichungssystem, das es zu lösen gilt:

$$
\begin{aligned}
I.\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
II.\ & 2x_1 \qquad\quad\ + x_3 = 4
\end{aligned}
$$

Wir haben zwei Gleichungen und drei Unbekannte und können somit eine der Unbekannten frei wählen, z.B. $x_3 = t$. Durch Einsetzen erhält man:

$$
\begin{aligned}
I.\ & 4x_1 + 2x_2 = 4 - t \\
II.\ & 2x_1 \qquad\quad = 4 - t \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2 - \frac{1}{2}t
\end{aligned}
$$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$I.\ \ 4x_1 + 2x_2 = 4 - t$

$x_1 = 2 - \frac{1}{2}t$

Eingesetzt in die erste Gleichung folgt:

$$4\left(2 - \frac{1}{2}t\right) + 2x_2 = 4 - t \ \Rightarrow\ 8 - 2t + 2x_2 = 4 - t$$

$$\Rightarrow\ 2x_2 = -4 + t \ \Rightarrow\ x_2 = -2 + \frac{1}{2}t$$

Die gefundenen Werte für x_1, x_2 und x_3 schreiben wir als Vektor untereinander, was uns anschließend zur Gleichung der Schnittgeraden führt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}t \\ -2 + \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da es auf die Länge des Richtungsvektors nicht ankommt, können wir diesen mit 2 multiplizieren, wodurch die Zahlen etwas „schöner“ werden.

Ergebnis:

Die Gleichung der Schnittgeraden von E und F lautet $s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$E_a\colon\ ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$

b) Werte für a, so dass die Ebene alle Koordinatenachsen schneidet

Wenn in einer Koordinatengleichung eine der Variablen x_1, x_2 oder x_3 wegfällt, so bedeutet dies, dass die Ebene parallel zur weggefallenen Koordinatenachse verläuft.

Wenn wir also in E_a $a = 0$ wählen, so haben wir $E_0\colon\ -2x_2 + x_3 = 4$ und E_0 verläuft parallel zur x_1-Achse, hat mit dieser also keinen Schnittpunkt.

Für $a = 2$ haben wir $E_2\colon\ 2x_1 + x_3 = 4$ und E_2 verläuft parallel zur x_2-Achse, hat mit dieser also keinen Schnittpunkt.

Für alle anderen Werte von a hat E_a somit Schnittpunkte mit allen Achsen.

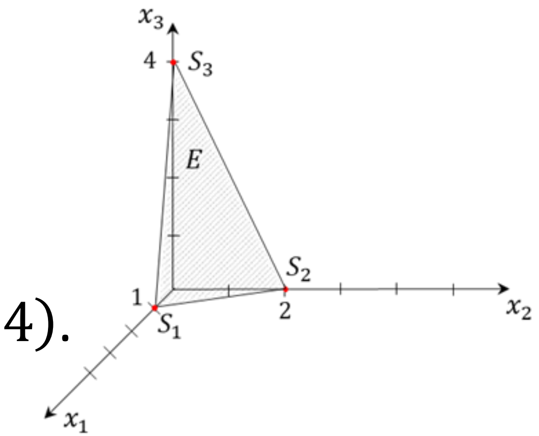
Ergebnis: Für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$ schneidet E_a alle Koordinatenachsen.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$E_a\colon\ ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$

Wert für a

Die Spurpunkte erhält man dadurch, dass man jeweils zwei Koordinaten Null setzt und nach der dritten Koordinate auflöst.



Somit erhalten wir $S_1\left(\frac{4}{a}\middle|0\middle|0\right)$, $S_2\left(0\,\middle|\frac{4}{a-2}\middle|\,0\right)$ und $S_3(0|0|4)$.

Die Bodenfläche der Pyramide ist das Dreieck OS_1S_2.

Die Seiten OS_1 und OS_2 stehen senkrecht zueinander, daher können wir die Fläche des Dreiecks „bequem“ wie folgt berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OS_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OS_2}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{a-2} = \frac{8}{a^2 - 2a}$$

Die Höhe h der Pyramide ist gegeben durch $h = \left|\overrightarrow{OS_3}\right| = 4$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$E_a\colon\ ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$

Das Volumen der Pyramide soll den Wert 6 annehmen, es soll also $V_P = \frac{1}{3}Ah = 6$ gelten. Somit haben wir nach Einsetzen $\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{a^2-2a} \cdot 4 = 6$.

Dies lösen wir nun nach a auf:

$\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{a^2-2a} \cdot 4 = 6 \qquad |\cdot 3(a^2-2a)$

$18(a^2-2a) = 32 \qquad |$ausmultiplizieren und -32

$18a^2 - 36a - 32 = 0 \qquad |:18$

$a^2 - 2a - \frac{16}{9} = 0 \qquad |pq$-Formel

$$a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = 1 \pm \frac{5}{3} \Rightarrow\ a_1 = \frac{8}{3}, \qquad a_2 = -\frac{2}{3}$$

Ergebnis: Sowohl für $\underline{a = \frac{8}{3}}$ als auch für $\underline{a = -\frac{2}{3}}$ gilt $V_P = 6$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$E_a\colon\ ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$

c) Wert für $\boldsymbol{a}$ so, dass der Abstand von $\boldsymbol{P(0|0|1)}$ zu $\boldsymbol{E_a}$ maximal ist

Zunächst formen wir die Koordinatenform $E_a\colon\ ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$ in die Hesse'sche Normalenform um.

Der Normalenvektor von E_a ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und hat die Länge

$$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + (a-2)^2 + 1} = \sqrt{a^2 + a^2 - 4a + 4 + 1} = \sqrt{2a^2 - 4a + 5}$$

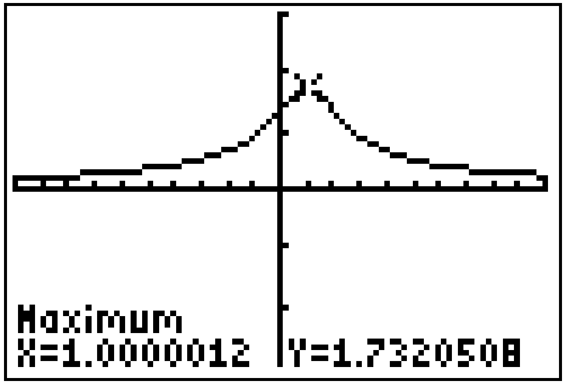
Damit erhalten wir $HNF\ E_a\colon \frac{ax_1+(a-2)x_2+x_3-4}{\sqrt{2a^2-4a+5}} = 0.$

Es folgt $d(P, E_a) = \frac{|a\cdot 0+(a-2)\cdot 0+1-4|}{\sqrt{2a^2-4a+5}} = \frac{3}{\sqrt{2a^2-4a+5}}.$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$$d(P, E_a) = \frac{3}{\sqrt{2a^2 - 4a + 5}}$$

Um das Maximum herauszufinden, geben Sie den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung im GTR z.B. bei Y_1 ein, lassen sich die Kurve im x-Abschnitt $[-10; 10]$ und im y-Abschnitt $[-3; 3]$ zeichnen.
Mit 2ND CALC maximum erhalten Sie den maximalen Wert für $a = 1$.



Ergebnis: Für $a = 1$ hat der Punkt $P(0|0|1)$ zu E_a maximalen Abstand.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe B2

$E_a\colon\ ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 = 4$

Nachweis der Behauptung, dass die Schar keine zueinander parallele Ebenen enthält

Angenommen zwei Ebenen der Schar, E_a und E_b, seien parallel, dann müssen deren Normalenvektoren $\vec{n}_a = \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_b = \begin{pmatrix} b \\ b-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sein. Es müsste also ein $k \in \mathbb{R}$ geben so, dass $\begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} b \\ b-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt.

Anhand der dritten Koordinate sieht man, dass $k = 1$ sein muss. Anhand der ersten Koordinate sieht man anschließend, dass mit $k = 1$ auch $a = b$ gilt, was auch in der zweiten Koordinate zu keinem Widerspruch führt. Damit sind E_a und E_b identisch und folglich gibt es keine zwei verschiedenen(!) Ebenen der Schar, die zueinander parallel sind.