Abiturprüfung Mathematik 2018 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

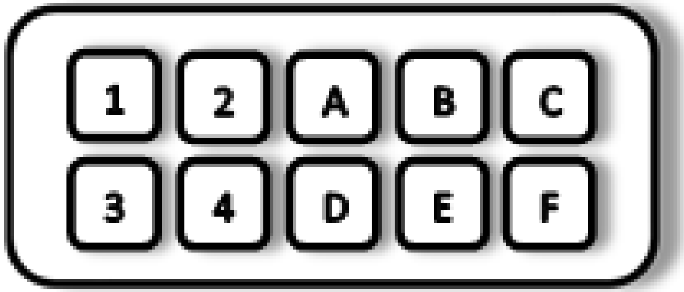
Wahlteil Stochastik C 2

Lösung der Aufgabe C 2

klaus_messner@web.de

Wahlteil 2018 – Aufgabe C 2

Aufgabe C 2



Ein Affe sitzt vor einer Tastatur, deren Tasten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 sowie mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sind (siehe Abbildung).
Zunächst wird angenommen, dass der Affe zufällig auf die Tasten tippt.

a) Es werden die ersten fünf Tastaturanschläge des Affen betrachtet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: „Der Affe tippt nur Tasten mit Ziffern."
B: „Der Affe tippt höchsten dreimal eine Ziffer."
C: „Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben A F F E direkt nebeneinander."

(3 VP)

Wahlteil 2018 – Aufgabe C 2

b) Nun werden Versuchsreihen mit jeweils 20 Tastaturanschlägen durchgeführt.
Wie viele Buchstaben pro Versuchsreihe kann man dabei auf lange Sicht im Mittel erwarten?
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Versuchsreihe die Anzahl der getippten Buchstabentasten um höchstens $20\ \%$ von diesem erwarteten Wert abweicht.
Wie viele Zifferntasten müssten mindestens hinzugefügt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Buchstabentasten in einer Versuchsreihe getippt werden, auf unter $1\ \%$ fällt?

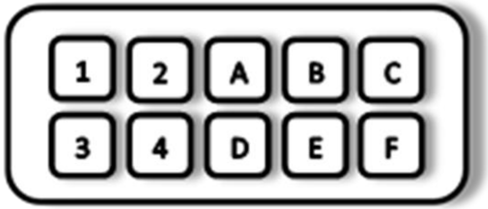
(4,5 VP)

Wahlteil 2018 – Aufgabe C 2

c) Die Ergebnisse der Versuche lassen die Vermutung aufkommen, dass der Affe die Zifferntasten gegenüber den Buchstabentasten bevorzugt. Daher wird die Nullhypothese „Der Affe tippt mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $40\ \%$ eine Zifferntaste.“ mit einer Stichprobe von 80 Tastaturanschlägen auf einem Signifikanzniveau von $1\ \%$ überprüft. Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 VP)

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2



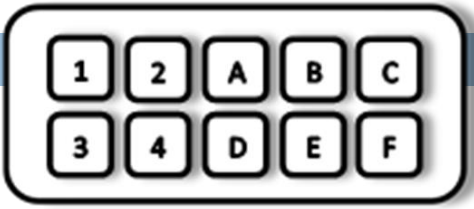
Lösung a)

Ereignis A: „Der Affe tippt nur Tasten mit Ziffern."

Die Tastatur hat 10 Tasten, 4 davon sind mit Ziffern beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit für eine Ziffer beträgt somit $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Affe nur Ziffern tippt ist folglich $\left(\frac{2}{5}\right)^5$.

Ergebnis: Es gilt $P(A) = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = 0{,}01024 \approx 1\%$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2



Ereignis B: „Der Affe tippt höchsten dreimal eine Ziffer."

Das Gegenereignis zu B ist $\bar{B}$ = „der Affe tippt viermal oder fünfmal eine Ziffer". Damit ist $P(B) = 1 - P(\bar{B})$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Affe vier Ziffern tippt ist $5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{6}{10} = 0{,}0768$. Beachte, dass der einzelne Buchstabe an jeder der 5 möglichen Positionen vorkommen kann, was den Faktor 5 in der Formel erklärt.

Die Wahrscheinlichkeit für 5 getippte Ziffern ist $\left(\frac{2}{5}\right)^5 = 0{,}01024$.
Damit haben wir $P(\bar{B}) = 0{,}0768 + 0{,}01024 = 0{,}08704$ also
$P(B) = 1 - 0{,}08704 = 0{,}91296 \approx 91{,}3\%$.

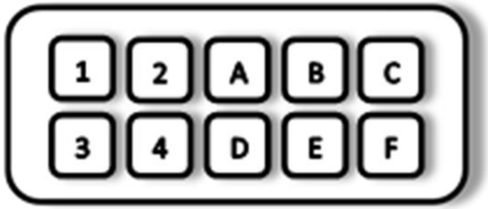
Ergebnis: Es gilt $P(B) \approx \underline{91{,}3\%}$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2

Ereignis C: „Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben A F F E direkt nebeneinander."

Die Wahrscheinlichkeit, den Buchstaben A zu tippen ist $\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$.
Dies gilt natürlich auch für jeden anderen Buchstaben. (Verwechseln Sie dies nicht mit der Wahrscheinlichkeit für „irgendeinen" Buchstaben, denn diese beträgt $\frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$).
In einer Reihe mit 5 Tastenanschlägen kann das Wort AFFE an erster oder zweiter Position beginnen. Wir haben also die beiden Möglichkeiten $(*, A, F, F, E)$ bzw. $(A, F, F, E, *)$ wobei das Sternchen für „irgendeine Taste" steht. Die Wahrscheinlichkeit für „irgendeine Taste" ist 1. Mithin ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $2 \cdot 1 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}0002$.

Ergebnis: Es gilt $P(C) \approx \underline{0{,}0002}$.



Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2

Lösung b)

Anzahl der Buchstaben auf lange Sicht

Mit der Zufallsvariablen X modellieren wir die Anzahl der Buchstaben in einem Experiment mit 20 Tastaturanschlägen. Folglich kann X die Werte 0 bis 20 annehmen. Da es sich um ein Bernoulli-Experiment handelt („Buchstabe" oder „nicht Buchstabe"), ist X binomialverteilt. Der Erwartungswert ist damit durch die Formel $E(X) = n \cdot p$ gegeben, wobei n=20 die Anzahl der Versuche (=Tastenanschläge) und $p = \frac{3}{5}$ die Trefferwahrscheinlichkeit (also die Wahrscheinlichkeit für „Buchstabe") darstellt. Es folgt $E(X) = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12.$

Ergebnis: Auf lange Sicht sind im Mittel 12 Buchstaben pro Experiment mit 20 Tastaturanschlägen zu erwarten.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2

Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung um höchstens 20% vom Erwartungswert

20% von 12 (dem Erwartungswert) sind $12 * 0{,}2 = 2{,}4$.

Da es hier aber um ganze Zahlen geht müssen wir uns jetzt fragen, ob wir die $2{,}4$ auf- oder abrunden müssen. Die Abweichung vom Erwartungswert soll „höchstens" $2{,}4$ betragen, d.h. wir können nicht auf 3 aufrunden, denn dann würde wir ja über der $2{,}4$ liegen. Wir müssen also auf 2 abrunden und haben entsprechend die Spanne von 10 bis 14 Buchstaben zu betrachten.

Gesucht ist demnach $P(10 \leq X \leq 14)$.

Wir formen diesen Ausdruck nun „GTR-gerecht" um und erhalten:

$$P(10 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 9)$$

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2

Mit $n = 20$ und $p = 0{,}6$ bestimmen wir die rechte Seite mit dem GTR wir folgt:

binomcdf(20,0.6,14)-binomcdf(20,0.6,9)

Sie erhalten den ungefähren Wert $0{,}747$.

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der getippten Buchstaben um höchsten 20% vom Erwartungswert abweicht, beträgt etwa $\underline{74{,}7\%}$.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2

Anzahl Zifferntasten

Laut Aufgabenstellung soll $P(X \geq 15) < 0{,}01$ gelten, wobei X für die Anzahl der Buchstaben in einem „Tippexperiment“ mit 20 Tastaturanschlagen steht.

Umformung für den GTR $1 - P(X \leq 14) < 0{,}01$ bzw. $P(X \leq 14) > 0{,}99$.

Wenn wir der Tastatur k Zifferntasten hinzufügen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Buchstabe getippt wird $p = \frac{6}{10+k}$.

Im GTR geben Sie nun bei Y_1 den Ausdruck binomcdf(20,6/(10+X),14) ein und lassen sich mit 2ND TABLE die Wertetabelle anzeigen. Aus der Tabelle entnimmt man, dass man für $X = 3$ erstmals über 0,99 liegt.

X	Y1	
1	.94904	
2	.97931	
3	.99142	
4	.99634	
5	.99839	
6	.99927	
7	.99965	

X=3

Ergebnis: Es müssen drei Zifferntasten hinzugefügt werden, damit die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2

Lösung c)

Entscheidungsregel

Wir haben die Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}4$, die Anzahl der Tastaturanschläge mit $n = 80$ und das Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$.

Es handelt sich um ein Bernoulli-Experiment, denn wir fragen nach „Zifferntaste“ oder „nicht Zifferntaste“.

Demgemäß ist die Zufallsvariable X, die für die Anzahl der Zifferntaste steht binomialverteilt.

Wenn wir nun in der Stichprobe mehr als eine gewisse Anzahl k an Zifferntasten vorfinden, muss H_0 abgelehnt werden.

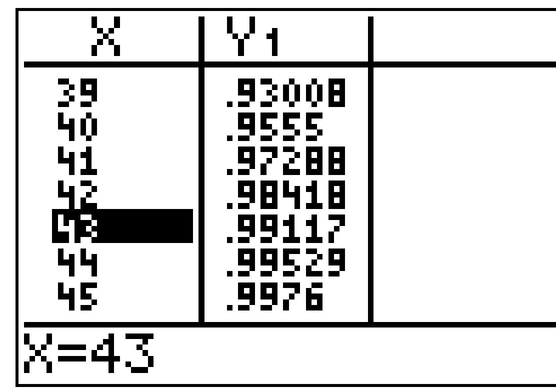
Unser Ablehnungsintervall hat somit die Gestalt $[k, \ldots, 80]$, d.h. wir führen einen rechtsseitigen Test durch.

Wahlteil 2018 – Lösung Aufgabe C 2

Gesucht ist also ein kleinstmögliches k, so dass $P(X \geq k) \leq 0{,}01$ gilt.

Wir formen die linke Seite um zu $1 - P(X \leq k-1) \leq 0{,}01$ bzw.
$P(X \leq k-1) \geq 0{,}99$.

Im GTR geben Sie bei Y_1 den Ausdruck binomcdf(80,0.4,X-1) ein und lassen sich die Wertetabelle anzeigen.



In der Tabelle lesen Sie ab, dass man für $k = 43$ erstmals über $0{,}99$ liegt.

Entscheidungsregel:

Wenn bei einem Tippexperiment mit 80 Tastaturanschlägen 43 oder mehr Zifferntasten gezählt werden wird H_0 abgelehnt, andernfalls angenommen.