Abiturprüfung Mathematik 2019 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

Pflichtteil

Lösungen

klaus_messner@web.de

Pflichtteil 2019

Aufgabe 1

Bilden Sie eine Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^4 \cdot \sin(3x)$.

(2 VP)

Lösung:

Unter Verwendung sowohl der Produkt- als auch der Kettenregel folgt:

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin(3x) + x^4 \cdot \cos(3x) \cdot 3$$

$$= \underline{4x^3 \sin(3x) + 3x^4 \cos(3x)}$$

Pflichtteil 2019

Aufgabe 2
Lösen Sie die Gleichung $(\cos(x))^2 + 2\cos(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$.

(2,5 VP)

Lösung:

$(\cos(x))^2 + 2\cos(x) = 0$ |Ausklammern
$\cos(x) \cdot (\cos(x) + 2) = 0$

Diese Gleichung wird nur dann 0, wenn $\cos(x) = 0$ wird oder wenn $(\cos(x) + 2) = 0$ wird.
Letzteres ist nicht möglich, da cos nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt.
$\cos(x) = 0$ gilt im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$ für $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

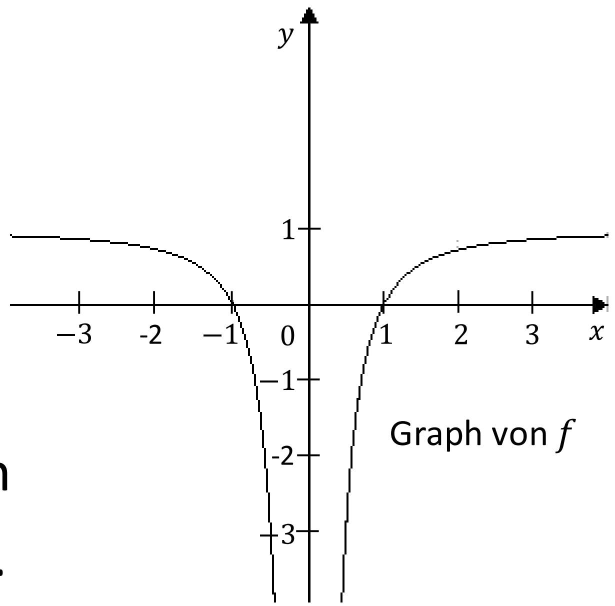
Ergebnis: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2}\pi$

Pflichtteil 2019

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$,
die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat.

Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.



a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

(2,5 VP)

$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$x_1 = -1, x_2 = 1$
$g\colon y = -3$

Pflichtteil 2019

Lösung Aufgabe 3 a)

Schneiden von g mit f durch Gleichsetzen $\Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = -3$ nach x auflösen.

$$1 - \frac{1}{x^2} = -3 \qquad |\cdot x^2$$

$$x^2 - 1 = -3x^2 \qquad |+3x^2 + 1$$

$$4x^2 = 1 \qquad |:4$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \qquad |\sqrt{}$$

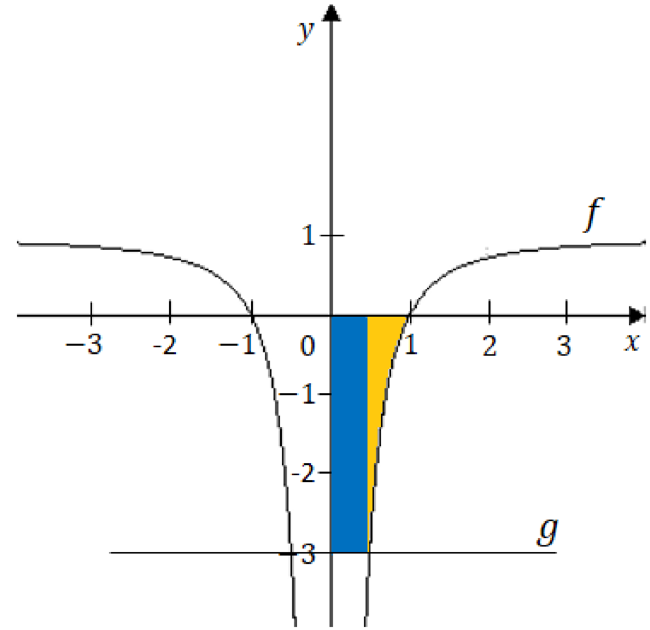
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$$

Ergebnis: Wie behauptet schneidet die Gerade g die Kurve f in einem Schnittpunkt bei der x-Koordinate $\frac{1}{2}$.

$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Pflichtteil 2019

Lösung Aufgabe 3 b)

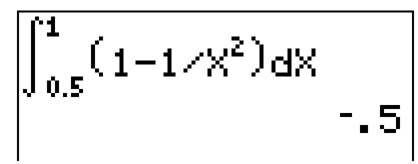


Die Fläche, die begrenzt wird durch die x-Achse und die beiden Kurven, kann man aus dem blauen Rechteck und dem gelben Flächenstückchen bilden.

Das Rechteck hat die Höhe $h = 3$ und Breite $b = \frac{1}{2}$ (Schnittpunkt von g mit f bei x_2).

Somit gilt $A_1 = h \cdot b = \frac{3}{2}$.

Die gelbe Fläche ist gegeben durch $A_2 = \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx \right|$.



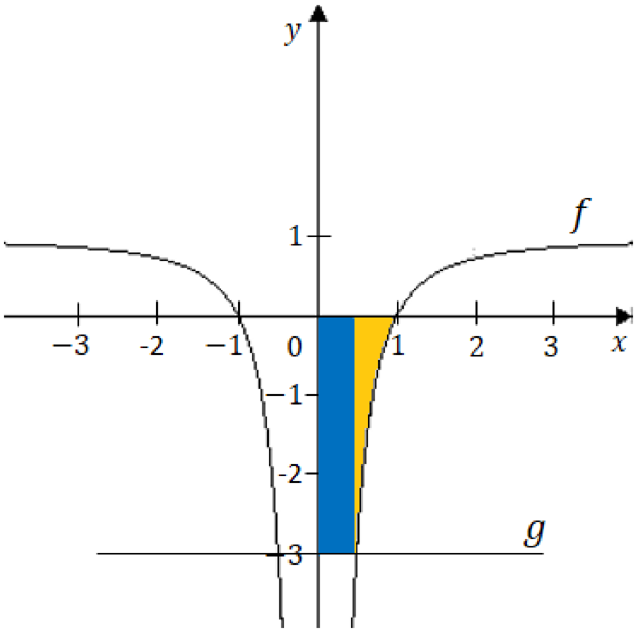
Eingabe im GTR liefert den Wert $0{,}5$.

Pflichtteil 2019

Die blaue und die gelbe Fläche ergeben nun zusammen $\mathrm{A} = 1{,}5 + 0{,}5 = 2$.

Wir dürfen aber nicht vergessen, dass dieselbe Fläche noch einmal links von der y-Achse vorliegt!

Deshalb gilt: $A_{gesamt} = 2 \cdot \mathrm{A} = 2 \cdot 2 = 4$.



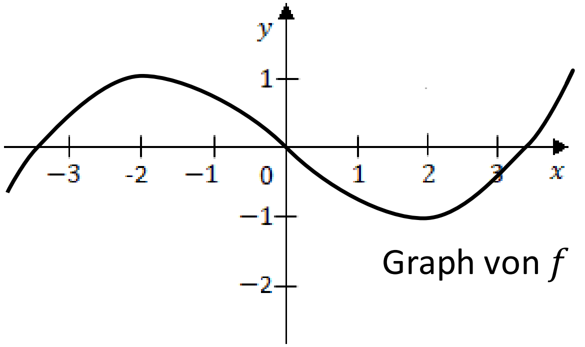
Ergebnis: Die gesuchte Fläche hat den Inhalt 4 LE^2.

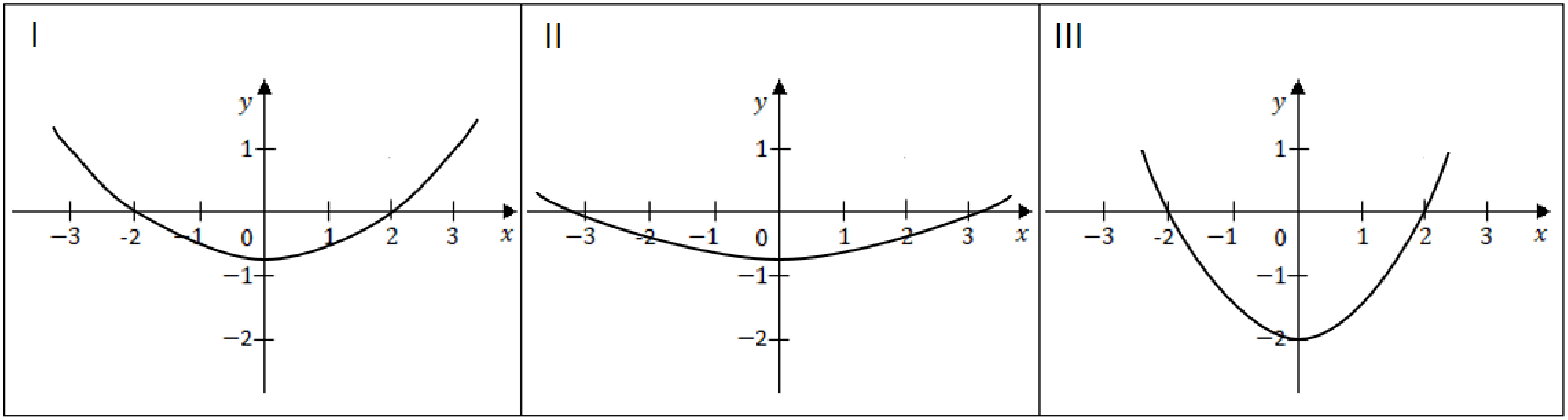
Pflichtteil 2019

Aufgabe 4

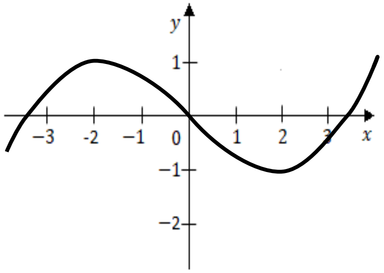
Die Abbildung rechts zeigt den Graphen einer Funktion f

a) Einer der folgenden Graphen I, II oder III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f.
Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.





Pflichtteil 2019



b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.
Geben Sie das Monotonieverhalten von F in Intervall [1;3] an.
Begründen Sie Ihre Angabe.

(2,5 VP)

Lösung 4 a)

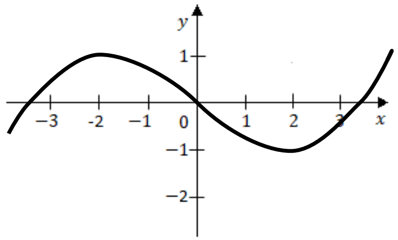
Der Graph von f hat an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ eine waagrechte Tangente, d.h. $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$, was Schaubild II ausschließt.

Bei $x = 0$ hat f eine fallende Tangente mit einer Steigung von ungefähr – $0{,}7$, jedenfalls entspricht die Steigung grob der der Nebendiagonalen.

Somit bleibt nur noch Schaubild I für den Graphen von f'

Ergebnis: Schaubild I zeigt den Graphen von f'.

Pflichtteil 2019



Lösung 4 b)

Es gilt $\int_1^3 f(x)dx < 0$, da f im Intervall $[1; 3]$ unterhalb der x-Achse verläuft!

Die Fläche im Intervall $[1; t]$ unterhalb der x-Achse wird betragsmäßig immer größer, je mehr t sich dem Wert 3 annähert, d.h. umgekehrt wird $\int_1^t f(x)dx$ immer kleiner, je mehr t sich dem Wert 3 (von links) annähert.

Ergebnis: F ist im Intervall $[1; 3]$ streng monoton fallend.

Pflichtteil 2019

Aufgabe 5

Gegeben sind die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$E\colon 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14.$

a) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

b) Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an der Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

(4 VP)

Pflichtteil 2019

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$E\colon 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14$$

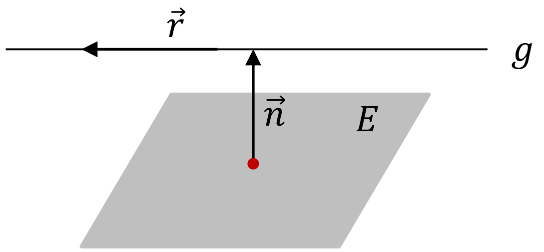
Lösung Aufgabe 5 a) Gegenseitige Lage

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Richtungsvektor von g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Wegen $\vec{n} \cdot \vec{r} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-3) = 0$ stehen $\vec{n}$ und $\vec{r}$ senkrecht zueinander, d.h. g verläuft parallel zu E oder g liegt in E.

Wir teste durch Einsetzen, ob der Stützvektor von g in E liegt:

$$3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 1 \neq 14$$

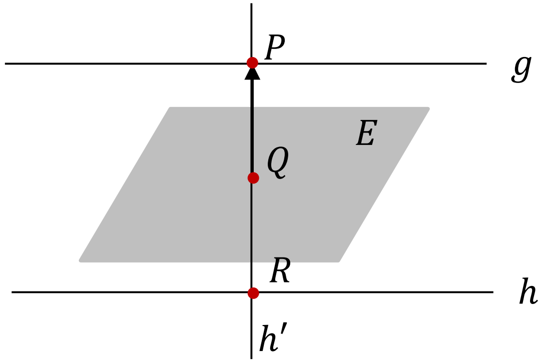


Ergebnis: g verläuft parallel zu E.

Pflichtteil 2019

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$
$$E\colon 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14$$

Lösung Aufgabe 5 b) Spiegelung von g an E



Wir wählen zunächst einen beliebigen Punkt auf g, der Einfachheit halber den durch den Stützvektor gegebenen Punkt $P(2|0|1)$.

Damit konstruieren wir die Hilfsgerade h', senkrecht zu E, die durch den Punkt P geht.

Der Richtungsvektor von h' ist somit der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ von E.

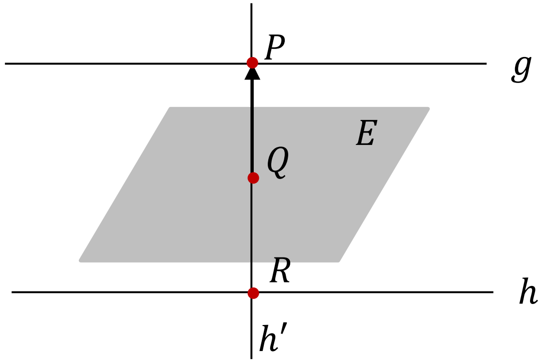
Damit haben wir eine Geradengleichung für h', nämlich

$$h'\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$E\colon 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14$

$h'\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pflichtteil 2019



Wir bestimmen nun den Schnittpunkt von h‘ mit E durch Einsetzen:

$$h'\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3t \\ -2t \\ 1 + t \end{pmatrix}$$

Einsetzen in E:

$3(2 + 3t) + 4t + (1 + t) = 14$ |ausmultiplizieren

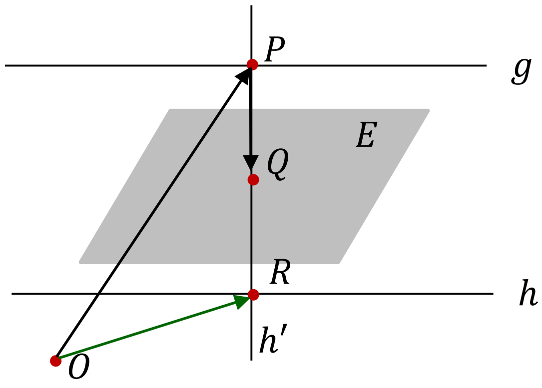
$14t + 7 = 14$ $|-7$

$14t = 7$ liefert $t = \frac{1}{2}$. Einsetzen in h‘ liefert $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt von h‘ mit E ist somit $Q(3{,}5|-1|1{,}5)$.

Pflichtteil 2019

$P(2|0|1)$
$Q(3{,}5|-1|1{,}5)$
$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$



Über die Gleichung $\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$ erhalten wir schließlich einen Stützvektor $\vec{a}$ auf h‘. Es folgt:

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\left(\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

Mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und dem Richtungsvektor von g (h hat denselben Richtungsvektor), können wir nun endlich eine Geradengleichung für h angeben.

Ergebnis: Die Gleichung der gesuchten Spiegelgeraden lautet

$$\underline{\underline{h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}}.$$

Pflichtteil 2019

Aufgabe 6

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem g die x_2x_3-Ebene schneidet.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(-3|-1|7)$ von der Geraden g.

(4 VP)

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pflichtteil 2019

Lösung Aufgabe 6 a) Schnitt von g mit x_2x_3-Ebene

Jeder Punkt der x_2x_3-Ebene zeichnet sich dadurch aus, dass die x_1-Koordinate 0 ist. Somit setzen wir in g $x_1 = 0$ und erhalten daraus:

$4 + t = 0 \Rightarrow t = -4$

Eingesetzt in g folgt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

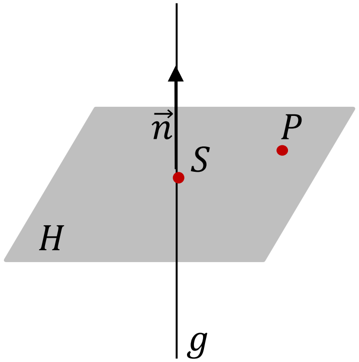
Ergebnis: Der Schnittpunkt von g mit E ist $\underline{P(0|2|-5)}$.

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P(-3|-1|7)$

Pflichtteil 2019

Lösung Aufgabe 6 b) Abstand von P zu g



Wir konstruieren eine Hilfsebene H, senkrecht zu g, so dass der Punkt P in H liegt, siehe Abbildung.

Der Richtungsvektor von g ist dabei der Normalenvektor von H, woraus sich eine noch unvollständige Koordinatengleichung für H ergibt:

$H\colon\ 1x_1 - 2x_2 + 2x_3 = d$ mit einem noch unbekanntem d.

Da P in H liegen soll, können wir dessen Koordinaten einsetzen und erhalten d:

$$1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 7 = 13 = d$$

Es folgt ein erstes Zwischenergebnis:

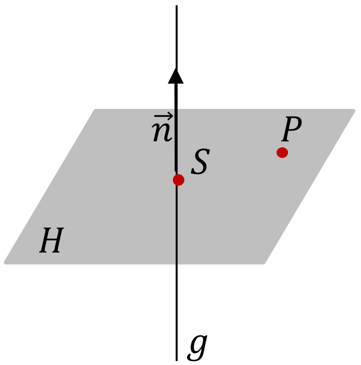
$$H\colon\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 13$$

Pflichtteil 2019

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P(-3|-1|7)$$

$$H\colon x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 13$$



Als nächstes bestimmen wir den Schnittpunkt S von g mit H durch Einsetzen (von g in H).

$(4 + t) - 2(-6 - 2t) + 2(3 + 2t) = 13$ | ausrechnen

$22 + 9t = 13 \quad |-22$

$9t = -9 \quad |:9$

$t = -1$

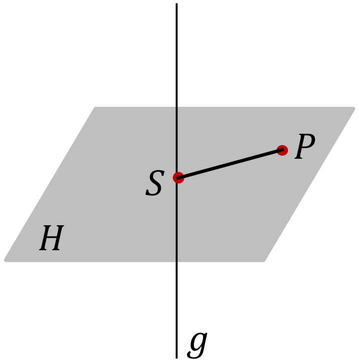
Einsetzen in g liefert: $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit ist $S(3|-4|1)$ der Schnittpunkt von g mit H das nächste Zwischenergebnis.

$S(3|-4|1)$
$P(-3|-1|7)$

Pflichtteil 2019

Der Abstand von P zu g ist nun gegeben durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{SP}$.



Es folgt

$$d = \left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-1\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$

Ergebnis: Der Abstand von P zu g beträgt 9 LE.

Pflichtteil 2019

Aufgabe 7

In einer Urne sind eine rote, eine weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis man eine schwarze Kugel zieht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: „Man zieht genau zwei Kugeln".

B: „Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel".

(3 VP)

5 Kugeln
1r, 1w, 3s

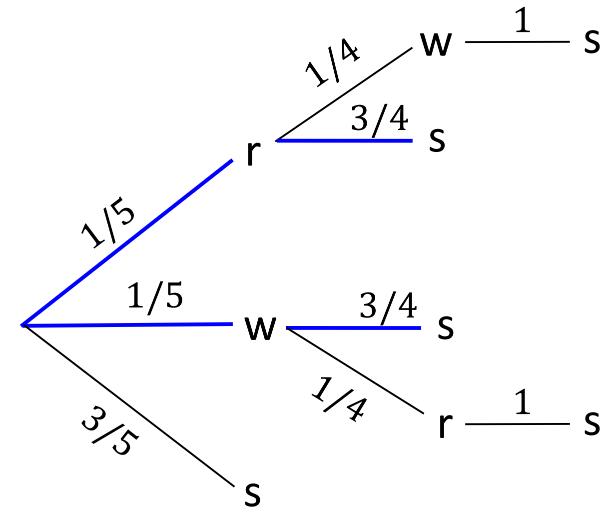
Pflichtteil 2019

Lösung Aufgabe 7

An einem Baumdiagramm kann man die Lösung schnell erkennen.

A: „Man zieht genau zwei Kugeln“. (blau markiert)

$$\underline{P(A)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = \underline{30\%}$$



B: „Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel“. (gelb markiert)

$$\underline{P(B)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{4} = 0{,}25 = \underline{25\%}$$