Abiturprüfung Mathematik 2019 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

Wahlteil Analysis A 1

Lösung der Aufgaben

A 1.1 und A 1.2

klaus_messner@web.de

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Aufgabe A 1.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 17$ die Höhe einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Wochen und $f(t)$ die Höhe in Zentimetern.

a) Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Höhe der Pflanze von 20 cm auf 40 cm zunimmt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Pflanzenhöhe $3{,}5$ Wochen nach Beobachtungsbeginn.
Die Funktion f hat bei $t = 6{,}5$ eine Wendestelle.
Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.

(4 VP)

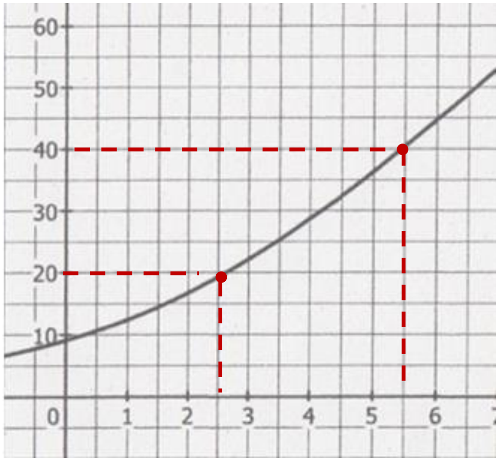
Wahlteil 2019 – Analysis A 1

b) Formulieren Sie zu der Gleichung $f(t+2) - f(t) = 5$ eine Fragestellung im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(2,5 VP)

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Lösung Aufgabe A 1 a)



Zeitraum

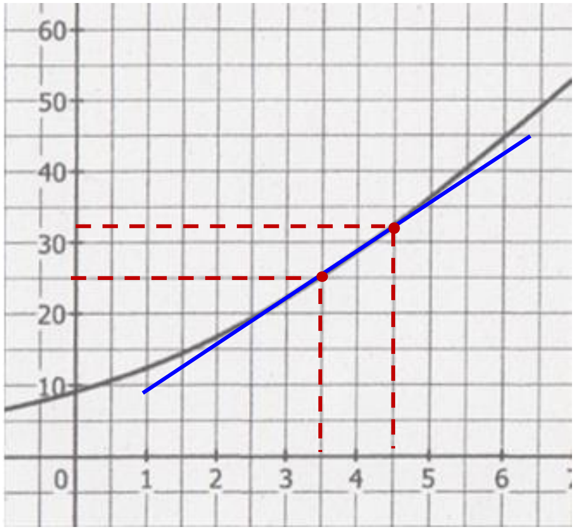
Der gesuchte Zeitraum kann direkt aus dem Diagramm im Anhang abgelesen werden.

Ergebnis:

Von Woche $2{,}6$ bis Woche $5{,}5$ nimmt die Höhe der Pflanze von 20 cm bis auf 40 cm zu.

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Momentane Änderungsrate



Wir zeichnen an der Stelle $t = 3{,}5$ eine Tangente an den Graphen von f und bestimmen deren Steigung.

Man liest ab $f(3{,}5) = 25$, $f(4{,}5) \approx 32$.

Damit folgt $f'(3{,}5) \approx \frac{32-25}{4{,}5-3{,}5} = 7$.

Ergebnis:

Die momentane Änderungsrate in Woche $3{,}5$ beträgt etwa 7 cm pro Woche.

Bedeutung der Wendestelle bei $t = 6,5$

Eine Wendestelle wie in der Aufgabe bei $t = 6{,}5$ bedeutet, dass die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt maximal ist und sich später abschwächt.

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Lösung Aufgabe A 1 b)

Fragestellung für Gleichung

In der Gleichung $f(t+2) - f(t) = 5$ beschreibt t einen Zeitpunkt und $t+2$ den Zeitpunkt zwei Wochen nach t.

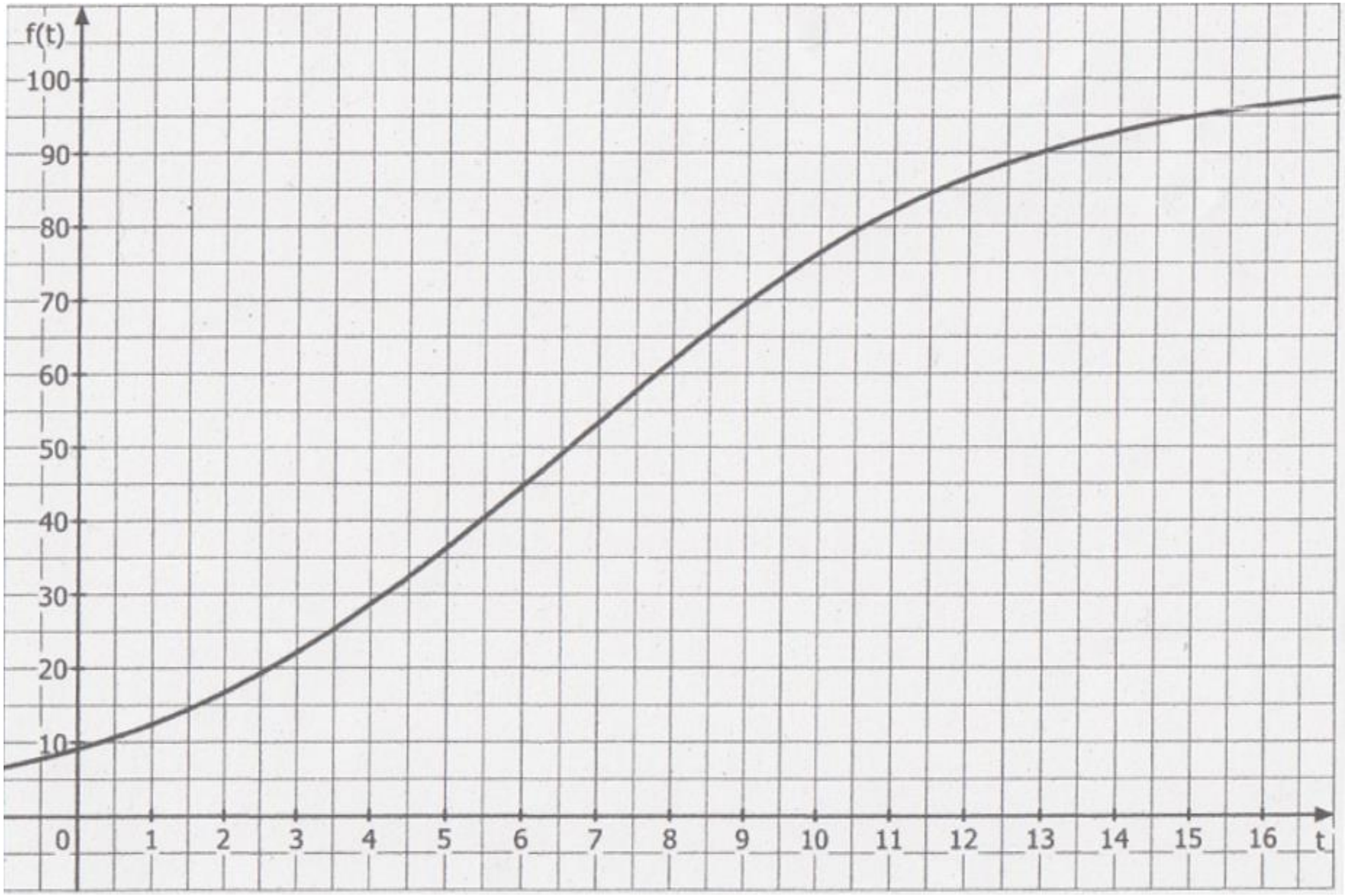
Somit beschreibt der Ausdruck $f(t+2) - f(t)$ die Größendifferenz der Pflanze in einem zweiwöchigen Zeitraum.

Eine entsprechende Frage könnte also wie folgt lauten:

Wie lautet der Startzeitpunkt t, bei dem die Pflanze innerhalb zwei Wochen um 5 cm wächst?

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Abbildung zu Aufgabe A 1.1

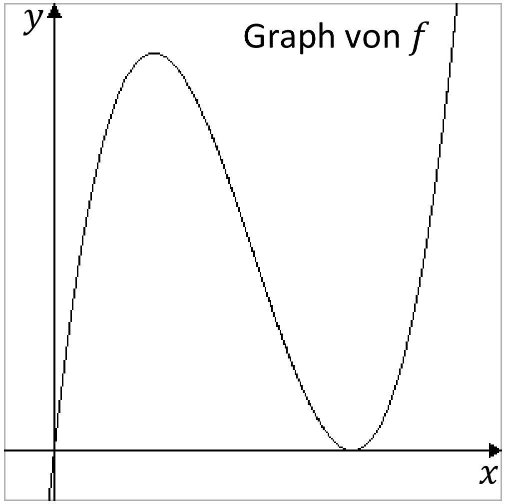


Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$.

Die Abbildung zeigt ihren Graphen.



a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $T(6|0)$ Tiefpunkt des Graphen von f ist.
Betrachtet wird die Strecke OH zwischen $O(0|0)$ und $H(2|8)$ des Graphen von f. Diese Strecke und der Graph von f begrenzen eine Fläche.
Berechnen Sie deren Inhalt.

(5 VP)

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

b) Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -3 \cdot f(x) - 6$.
Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht.
Bestimmen Sie damit die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von g.

(3 VP)

c) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt M auf der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ liegt, berührt den Graphen von f im Punkt $P(4|4)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von M.

(2,5 VP)

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

d) Für jedes k mit $k \neq 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}kx.$$

Berechnen Sie die Werte von k, für die die Tangente an den Graphen von f_k im Punkt $P(1|f_k(1))$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = 8x + 3$ ist.

(3 VP)

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Aufgabe A 1.2

a) Nachweis des Tiefpunkts $\boldsymbol{T(6|0)}$

Die ersten beiden Ableitungen von f sind $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$ und $f''(x) = \frac{3}{2}x - 6.$

Nullsetzen der ersten Ableitung liefert:

$\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = 0 \qquad | \cdot \frac{4}{3}$

$x^2 - 8x + 12 = 0 \qquad |$pq-Formel

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2 \;\Rightarrow x_1 = 6, x_2 = 2$

Einsetzen von $x_1 = 6$ in die weite Ableitung liefert:

$f''(6) = \frac{3}{2} \cdot 6 - 6 = 3 > 0$, also liegt bei $x_1 = 6$ tatsächlich ein Tiefpunkt vor.

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$

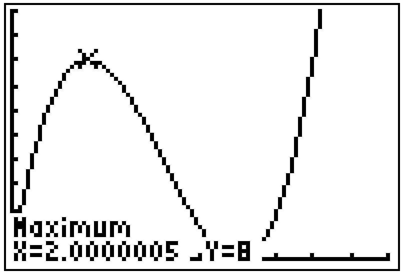
Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Einsetzen von $x_1 = 6$ in f liefert die y-Koordinate:
$f(6) = 54 - 108 + 54 = 0$

Ergebnis: Der Tiefpunkt liegt wie behauptet bei $T(6|0)$.

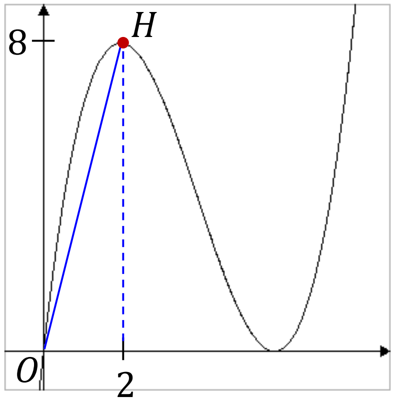
Fläche zwischen OH und dem Graphen von f

Mit dem GTR lässt sich schnell bestätigen, dass $H(2|8)$ der Hochpunkt von f ist.



Das in der Abbildung eingezeichnete Dreieck hat Höhe 8 und Breite 2. Der Flächeninhalt ist also

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$



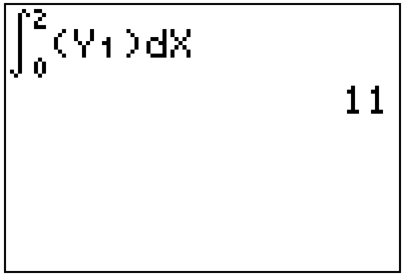
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$

$A_1 = 8$

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; 2]$ ist gegeben durch das Integral

$$A_2 = \int_0^2 f(x)dx = 11$$ (Berechnung mit dem GTR)

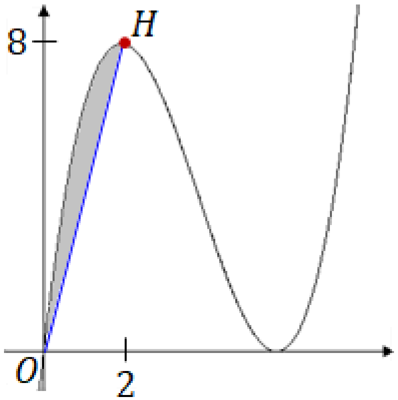


Die gesuchte Fläche ergibt sich aus der Differenz:

$$A = A_2 - A_1 = 11 - 8 = 3$$

Ergebnis:

Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Strecke OH beträgt 3 LE².



$g(x) = -3 \cdot f(x) - 6$

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

b) Beschreibung wie g aus f entsteht

Schritt 1: f wird um den Faktor 3 in entlang der y-Achse gestreckt, woraus $3 \cdot f(x)$ entsteht.

Schritt 2: Spiegelung an der y-Achse, woraus $-3 \cdot f(x)$ entsteht.

Schritt 3: Verschiebung nach unten um 6 Einheiten, woraus sich g ergibt.

Koordinaten des Tiefpunkts von g

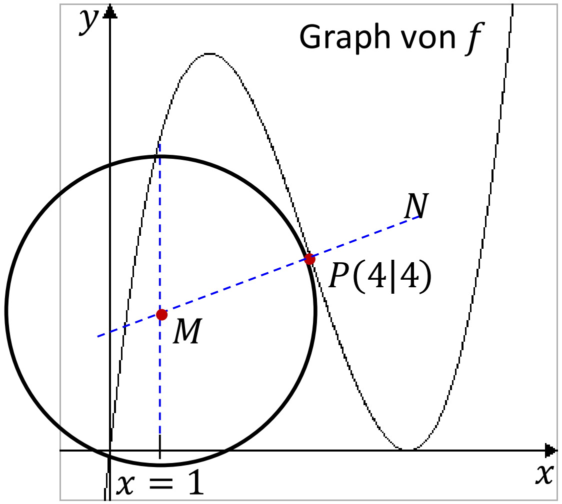
Der Hochpunkt von f liegt bei $T(2|8)$, was nach einer Spiegelung an der y-Achse, einer Streckung und einer Verschiebung nach unten zum Tiefpunkt von g wird. Mit $f(2) = 8$ folgt $g(2) = -3 \cdot 8 - 6 = -30$.

Ergebnis: Der Tiefpunkt von g liegt bei $T(2|-30)$.

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$
$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

c) Mittelpunkt M des Kreises



Wir bestimmen zunächst die Gleichung der Normalen im Punkt $P(4|4)$, mit Hilfe der Normalenformel:

$$N:\ y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

In unserem Fall ist $x_0 = 4$ und wir erhalten:

$$N:\ y = -\frac{1}{-3}(x - 4) + 4 = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}\,.$$

Bei $x = 1$, der x-Koordinate des Mittelpunkts des Kreises, haben wir

$$y = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{8}{3} = 3\,.$$

Ergebnis: Der Mittelpunkt des Kreises liegt bei $\underline{M(1|3)}$.

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

d) Bestimmung von $\boldsymbol{k}$

Wir bestimmen zunächst die Gleichung der Tangente an f_k im Punkt $P(1|f_k(1))$.

Mit der Tangentenformel $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ und $x_0 = 1$ folgt:

$y = f_k'(1)(x - 1) + f_k(1)$.

Mit $f_k'(x) = \frac{3}{2k}x^2 - 6x + \frac{9}{2}k$ folgt weiter $f_k'(1) = \frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k$ und $f_k(1) = \frac{1}{2k} - 3 + \frac{9}{2}k$. Einsetzen in die Tangentenformel liefert

$$y = \left(\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k\right)(x - 1) + \left(\frac{1}{2k} - 3 + \frac{9}{2}k\right).$$

Ausmultiplizieren: $y = \left(\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k\right)x - \left(\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k\right) + \left(\frac{1}{2k} - 3 + \frac{9}{2}k\right)$

Vereinfachen: $y = \left(\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k\right)x - \frac{1}{k} + 3.$

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Die Tangentengleichung im Punkt P lautet also

T: $y = \left(\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k\right)x - \frac{1}{k} + 3.$

Die Tangente soll parallel zur Geraden $y = 8x + 3$ verlaufen, d.h. die Steigung der beiden Geraden müssen übereinstimmen.

Wir haben demnach $\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k = 8$ zu lösen. Nach Addition von 6 folgt

$$\frac{3}{2k} + \frac{9}{2}k = 14 \qquad |\cdot 2k$$

$$3 + 9k^2 = 28k \qquad |-28k$$

$$9k^2 - 28k + 3 = 0 \qquad |:9$$

$$k^2 - \frac{28}{9}k + \frac{1}{3} = 0 \qquad |\text{pq-Formel}$$

$$k_{1,2} = \frac{14}{9} \pm \sqrt{\frac{196}{81} - \frac{27}{81}} = \frac{14}{9} \pm \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{14}{9} \pm \frac{13}{9} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3, k_2 = \frac{1}{9}.$$

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

Die Tangentengleichung im Punkt P lautet also

$$\text{T: } y = \left(\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k\right)x - \frac{1}{k} + 3$$

Die Tangente soll parallel zur Geraden $y = 8x + 3$ verlaufen, d.h. die Steigung der beiden Geraden müssen übereinstimmen.

Wir haben demnach $\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k = 8$ zu lösen.

$$\frac{3}{2k} - 6 + \frac{9}{2}k = 8 \qquad |+6$$

$$\frac{3}{2k} + \frac{9}{2}k = 14 \qquad |\cdot 2k$$

$$3 + 9k^2 = 28k \qquad |-28k$$

$$9k^2 - 28k + 3 = 0 \qquad |:9$$

$9k^2 - 28k + 3 = 0 \;|:9$

Wahlteil 2019 – Analysis A 1

$k^2 - \frac{28}{9}k + \frac{1}{3} = 0$ |pq-Formel

$$k_{1,2} = \frac{14}{9} \pm \sqrt{\frac{196}{81} - \frac{27}{81}} = \frac{14}{9} \pm \sqrt{\frac{169}{81}} = \frac{14}{9} \pm \frac{13}{9} \;\Rightarrow\; k_1 = 3, k_2 = \frac{1}{9}.$$

Ergebnis:

Die Werte für die die Tangente durch den Punkt P parallel zur Geraden $y = 8x + 3$ verlaufen, sind $k_1 = 3$ und $k_2 = \frac{1}{9}$.