Abiturprüfung Mathematik 2019 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

Wahlteil Analysis A 2

Lösung der Aufgaben

A 2.1 und A 2.2

klaus_messner@web.de

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Aufgabe A 2.1

In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

<u>Versuchsreihe 1</u>

Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit
$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in mm²).

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.
Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

(3,5 VP)

b) Berechnen Sie $\frac{1}{4}\int_5^9 f(t)dt$.

Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(3,5 VP)

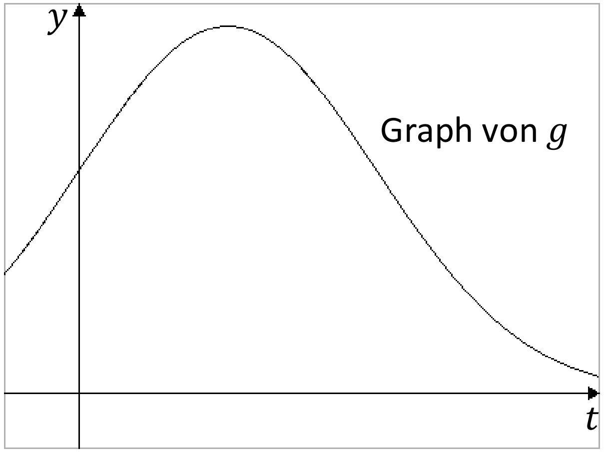
Wahlteil 2019 – Analysis A 2

<u>Versuchsreihe 2</u>

Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit

$$g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ in mm²).



Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion g.

c) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an.
Berechnen Sie diesen Wert.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist, wie zu Beobachtungsbeginn.

(5 VP)

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

d) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(t) = g(t + 10)$.
Für jede reelle Zahl gilt: $h(-t) = h(t)$.
Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann.

(2 VP)

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Aufgabe A 2.2

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 9t$.

Der Graph der Funktion f_t ist G_t.

a) Bestimmen Sie t so, dass der Punkt $P(1|4)$ auf dem Graphen G_t liegt.

(1 VP)

b) Jeder Graph G_t hat an der Stelle $x = \sqrt{t}$ einen Tiefpunkt.
Berechnen Sie denjenigen Wert von t, für den dieser Tiefpunkt möglichst hoch liegt.

(2,5 VP)

c) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die sämtliche Graphen G_t verlaufen.

(2,5 VP)

$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Lösung Aufgabe A 2.1 a)

Flächeninhalt 3 Stunden nach Beobachtungsbeginn

Da f laut Aufgabe den Fläche misst, die die Bakterienkultur bedeckt, bestimmt man mit dem GTR einfach $f(3) \approx 27$.

Ergebnis: Die Fläche, die die Bakterienkultur 3 Stunden nach Beobachtungbeginn einnimmt beträgt $\underline{27 \text{ mm}^2}$.

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Zeitpunkt für dreifache Fläche

Die Fläche zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt $f(0) = 20$. Wir suchen also einen Zeitpunkt t zu dem die Fläche den Wert 60 hat. Damit folgt:

$$60 = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} \quad |:20$$

$$3 = e^{0,1 \cdot t} \quad |:\ln$$

$$\ln 3 = 0,1t \quad |:0,1$$

$$t = \frac{\ln 3}{0,1} \approx 11$$

Ergebnis: Etwa 11 Stunden nach Beobachtungsbeginn bedeckt die Bakterienkultur die dreifache Fläche wie zu Beobachtungsbeginn.

$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Momentane Änderungsrate 2 Stunden nach Beobachtungsbeginn

Die momentane Änderungsrate wird dargestellt durch die erste Ableitung von f, also $f'(t) = 20e^{0,1t} \cdot 0,1 = 2e^{0,1t}$.

Damit haben wir $f'(2) = 2e^{0,2} \approx 2,44$

Ergebnis:

Die momentane Änderungsrate 2 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa 2,44 mm²/h.

$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Lösung Aufgabe A 2.1 b)

Berechnung und Bedeutung des Integrals

Der Wert des Integrals kann direkt mit dem GTR bestimmt werden:

$$\underline{\frac{1}{4}\int_5^9 f(t)dt \approx 40{,}5}$$ GTR oder Classpad

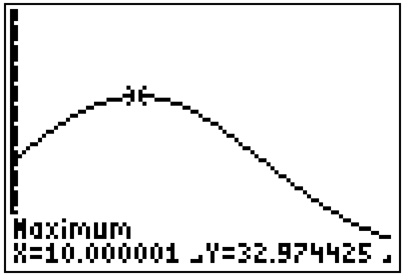
Der Term $\frac{1}{4}\int_5^9 f(t)dt$ stellt die <u>durchschnittliche Fläche</u> zwischen der 5ten und 9ten Stunde nach Beobachtungsbeginn dar.

$g(t) = 20 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}005 \cdot t^2}$

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Lösung Aufgabe 2.1 c (Versuchsreihe 2)

Zeitpunkt des größten Flächeninhalts



Zunächst gibt man die Funktion $g(t)$ im y-Editor des GTR ein und lässt sich den Graphen im z.B. x-Intervall $[0; 30]$ und im y-Intervall $[0; 50]$ zeichnen.

Mit 2ND CALC Maximum kann man dann den maximalen Wert ermitteln und erhält den Wert $32{,}97$ bei $t = 10$.

Ergebnis:

Die größtmögliche Fläche von etwa 33 mm² wird nach 10 Stunden erreicht.

$g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Zeitpunkt an dem die Fläche so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn

Die Fläche zu Beobachtungsbeginn beträgt $g(0) = 20$. Gesucht ist folglich ein (anderer) Zeitpunkt t für den $g(t)$=20 gilt. Die dadurch entstehende Gleichung lösen wir nach t auf:

$20 = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$ $|:20$

$1 = e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$ $|\ln$

$\ln 1 = 0,1t - 0,005t^2$ $|t$ ausklammern, $\ln(1) = 0$

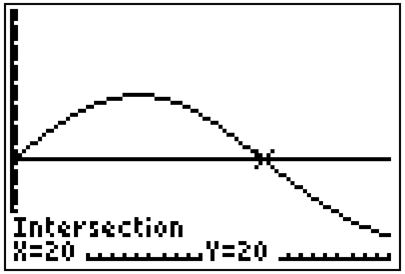
$0 = t(0,1 - 0,005t)$

Es folgt $0,1 - 0,005t = 0 \;\Leftrightarrow\; 0,1 = 0,005t \;\Leftrightarrow\; t = \frac{0,1}{0,005} = 20$

Ergebnis: 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die Fläche wieder genauso groß wie bei Beobachtungsbeginn

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Alternative Bestimmung mit dem GTR



Statt der Berechnung „von Hand" hätten wir auch den GTR verwenden können.

Nach Eingabe des Wertes 20 bei Y_2 im y-Editor und nochmaligem Zeichnen der beiden Graphen, kann man mit 2ND CALC intersect den (rechts liegenden) Schnittpunkt bestimmen und erhält ebenfalls den Wert $t = 20$.

Ergebnis: 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die Fläche wieder genauso groß wie bei Beobachtungsbeginn

$g(t) = 20 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}005 \cdot t^2}$
$h(t) = g(t + 10)$
$h(-t) = h(t)$

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Geometrische Eigenschaft von $\boldsymbol{h}$

Der Graph der Funktion h entsteht durch eine Verschiebung des Graphen von g in x-Richtung nach links(!).

$h(-t) = h(t)$ bedeutet, dass der Graph von h achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Zusammengenommen bedeutet dies, dass der Graph von g achsensymmetrisch zur senkrechten Achse bei $x = 10$ ist.

$f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 9t$
$P(1|4)$

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Lösung Aufgabe A 2.2 a)

Wert für t

Nach Einsetzen von $P(1|4)$ in f_t erhält man:

$4 = 1 - 2t + 9t$ |ausrechnen

$4 = 1 + 7t$ $\quad |-1$

$3 = 7t$ $\quad |:7$

$t = 3/7$

Ergebnis: Für den Wert $\underline{t = \frac{3}{7}}$ liegt der Punkt $P(1|4)$ auf dem Graphen von f_t.

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Lösung Aufgabe A 2.2 b)

Wert von t für höchsten Tiefpunkt

Einsetzen von $x = \sqrt{t}$ in f_t liefert die y-Koordinaten der Tiefpunkte:

$$y_t = \sqrt{t}^4 - 2t\sqrt{t}^2 + 9t = t^2 - 2t^2 + 9t = -t^2 + 9t$$

Durch Eingabe des rechten Terms im GTR kann man über 2ND CALC maximum leicht den höchsten Wert für y_t bestimmen.

Wir berechnen die Lösung „von Hand" durch Nullsetzen der ersten Ableitung:

$$y_t' = -2t + 9 = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{9}{2}$$

Einsetzen in y_t liefert $y_t = -\frac{81}{4} + \frac{81}{2} = -\frac{81}{4} + \frac{162}{4} = \frac{81}{4}$ $(= 20{,}25)$.

Ergebnis: Der höchste Tiefpunkt liegt für $t = \frac{9}{2}$ bei $T_{max}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} \middle| \frac{81}{4}\right)$.

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Lösung Aufgabe A 2.2 c)

Bestimmung der gemeinsamen Punkte von G_t

Wir setzen für t zwei beliebige Werte eine, sagen wir $t = u$ und $t = v$, setzen die beiden Ausdrücke gleich und lösen nach x auf.

$x^4 - 2ux^2 + 9u = x^4 - 2vx^2 + 9v \qquad |-x^4 + 2vx^2$

$-2ux^2 + 2vx^2 + 9u = 9v \qquad |-9u$, links aus $2x^2$ ausklammern

$2x^2(-u + v) = 9v - 9u \qquad |$rechts 9 ausklammern, $: 2(v - u)$

$x^2 = \frac{9(v-u)}{2(v-u)} \qquad |$kürzen und $\sqrt{}$

$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

Dies sind die x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte aller G_t.

$$f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 9t$$
$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Wahlteil 2019 – Analysis A 2

Durch Einsetzen von $x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ in f_t erhalten wir die y-Koordinaten:

$$y_t = f_t\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{81}{4} - 2t \cdot \frac{9}{2} + 9t = \frac{81}{4} - 9t + 9t = \frac{81}{4}.$$

Ergebnis:

Es gibt genau zwei gemeinsame Punkte aller Graphen G_t, nämlich
$\underline{P_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}} \,\middle|\, \frac{81}{4}\right)}$ und $\underline{P_2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \,\middle|\, \frac{81}{4}\right)}$.