# Abiturprüfung Mathematik 2019 Baden-Württemberg

## Allgemeinbildende Gymnasien

## Wahlteil Analytische Geometrie B 1

## Lösung der Aufgabe B 1

klaus_messner@web.de

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

**Aufgabe B 1**

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Ebene $T$ schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $K(5|0|1)$, $L(2|5|0)$, $M(0|5|2)$ und $N(1|0|5)$.

a) Zeichnen Sie das Viereck $KLMN$ in die Abbildung ein.
Zeigen Sie, dass das Viereck $KLMN$ ein Trapez ist und zwei gleich lange Seiten hat.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene $T$ in Koordinatenform.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von $T$ mit der $x_1$-Achse an.
(Teilergebnis: $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$)

(5 VP)

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

b) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche $KLMN$ liegt auf der Strecke $FG$.

Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen kann.

(2 VP)

c) Betrachten wir die Schar der Geraden

$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a > 0.$$

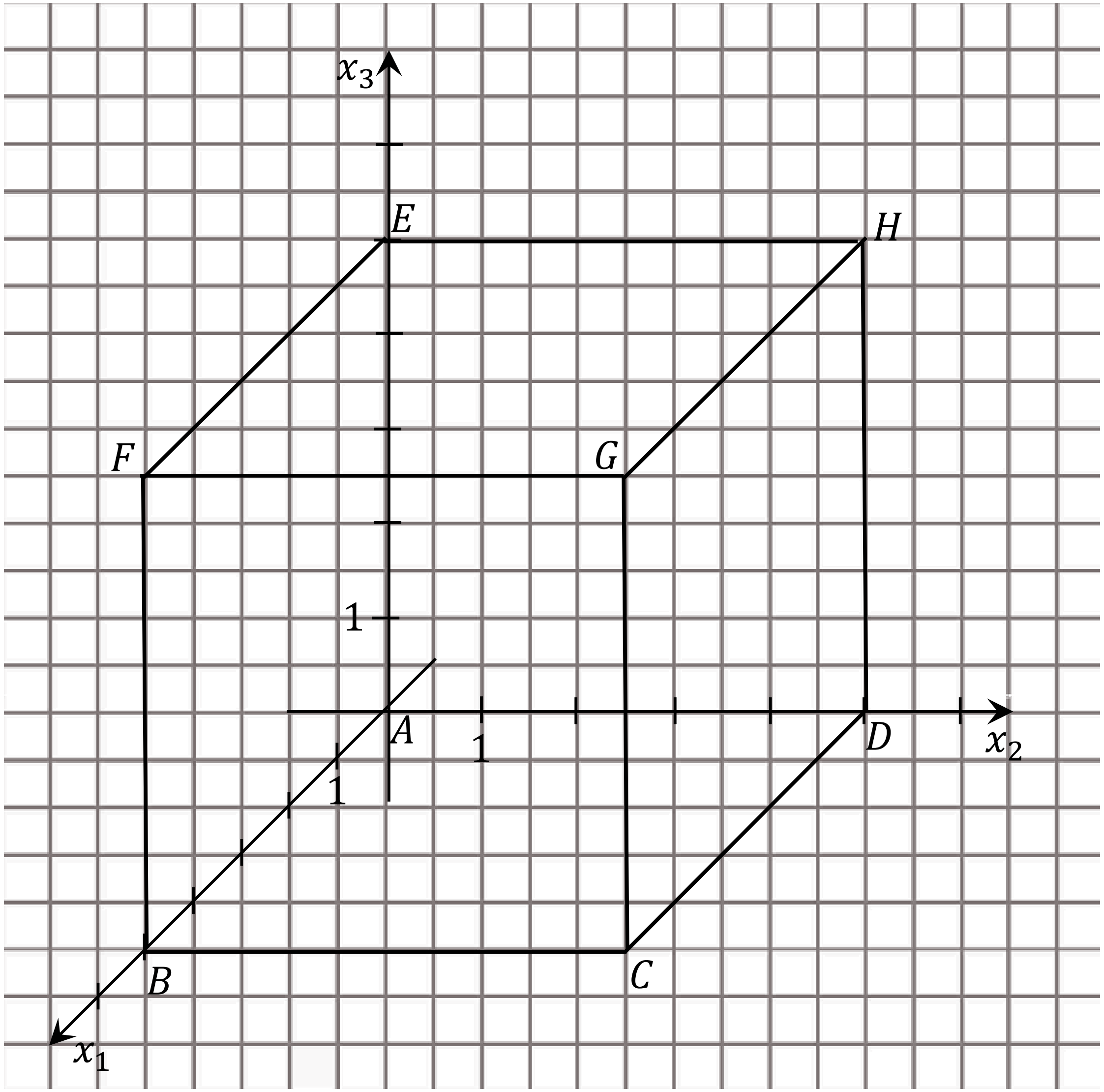
Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$ liegt.

Gegeben ist die Ebene $U\colon -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$.

Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von $T$ und $U$ zur betrachteten Schar gehört.

(3 VP)

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1



$K(5|0|1)$
$L(2|5|0)$
$M(0|5|2)$
$N(1|0|5)$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

**Lösung Aufgabe B 1 a)**

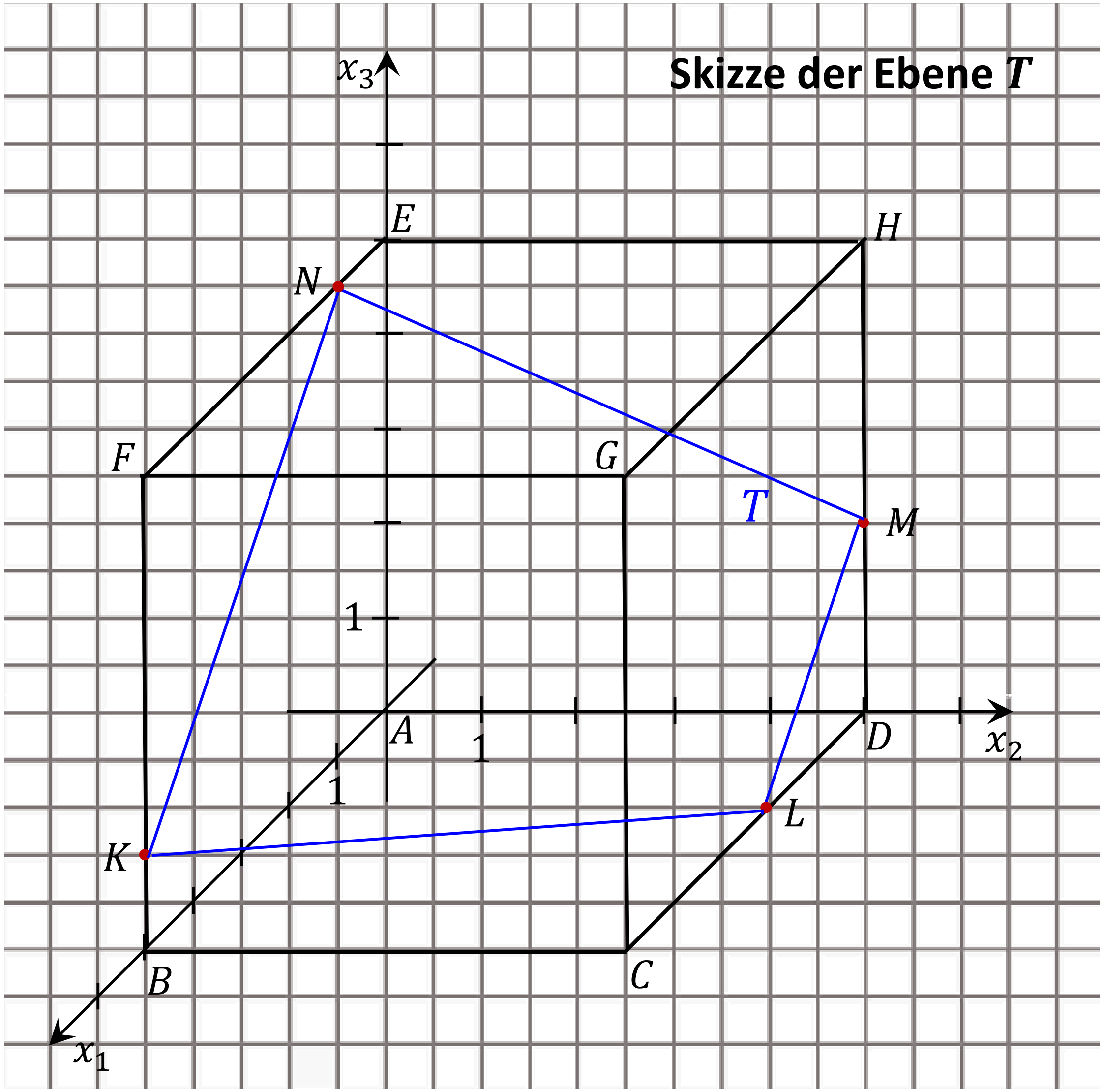
Anhand der Abbildung vermutet man, dass die Strecken $\overline{KN}$ und $\overline{LM}$ parallel verlaufen. Es gilt

$$\overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die lineare Abhängigkeit von $\overrightarrow{KN}$ und $\overrightarrow{LM}$ zeigt, dass die Strecken $\overline{KN}$ und $\overline{LM}$ tatsächlich parallel verlaufen.



$K(5|0|1)$
$L(2|5|0)$
$M(0|5|2)$
$N(1|0|5)$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

Dass die beiden Strecken nicht aufeinander liegen sieht man anhand der Zeichnung (oder an den Koordinaten der Eckpunkte). Damit ist das Viereck $KLMN$ ein Trapez.

Wir vermuten Anhand der Zeichnung, dass die Strecken $\overline{NM}$ und $\overline{KL}$ die gleiche Länge haben. Es folgt

$$\left|\overrightarrow{NM}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$$

und

$$\left|\overrightarrow{KL}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35}$$

Das Trapez hat also, wie behauptet, zwei gleichlange Seiten.

$K(5|0|1)$
$L(2|5|0)$
$M(0|5|2)$
$N(1|0|5)$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

**Koordinatengleichung der Ebene $T$**

Wir bilden zunächst zwei Richtungsvektoren der Ebene $T$, z.B. $\vec{u} = \overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mit dem Kreuzprodukt (=Vektorprodukt) erhält man daraus einen Normalenvektor für $T$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{array}{cc} \cancel{-4} & \cancel{-3} \\ 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ -4 & -3 \\ 0 & 5 \\ \cancel{4} & \cancel{-1} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Da es auf die Länge nicht ankommt, teilen wir durch $-4$ und erhalten

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor für die Ebene $T$.

$K(5|0|1)$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

Damit haben wir $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$ mit einem noch unbekannten $d$.

Da $K$ in $T$ liegt können wir $d$ durch Einsetzen bestimmen:

$5 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 30 = d.$

**Ergebnis:**

Die Koordinatengleichung für $T$ lautet $\underline{T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30}$.

$T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

**b) Höhe der Pyramide**

Da die Spitze der Pyramide irgendwo auf der Strecke $\overline{FG}$ liegen soll, muss die Koordinaten $S(5|t|5)$ für $0 \leq t \leq 5$.

Wir bestimmen nun den Abstand des Punktes $S(5|t|5)$ zur Ebene $T$, denn dieser Abstand ist nichts anderes als die Höhe der Pyramide.

Dazu muss die Koordinatengleichung von $T$ in die Hesse'sche Normalenform überführt werden:

$$HNF\ T: \frac{5x_1+4x_2+5x_3-30}{\sqrt{5^2+4^2+5^2}} = 0 \iff \frac{5x_1+4x_2+5x_3-30}{\sqrt{66}} = 0$$

Den Abstand von $S$ zu $T$ bekommen wir durch Einsetzen in die HNF (und Betragsbildung im Zähler). Somit gilt:

$$d = \frac{|5\cdot 5+4t+5\cdot 5-30|}{\sqrt{66}} = \frac{|20+4t|}{\sqrt{66}}.$$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

Die Frage ist also, ob es einen Wert $0 \leq t \leq 5$ gibt, so dass $\frac{|20+4t|}{\sqrt{66}} = \frac{18}{\sqrt{66}}$ gilt.

Wir multiplizieren mit $\sqrt{66}$ und erhalten $|20 + 4t| = 18$.

Falls $20 + 4t \geq 0$ ist, können wir die Betragsstriche weglassen und erhalten
$20 + 4t = 18 \iff 4t = -2 \iff t = -\frac{1}{2}$.

Falls $20 + 4t < 0$ ist, können wir die Betragsstriche nur weglassen, wenn wir den Ausdruck in den Betragsstrichen vorher mit $-1$ multiplizieren. Es folgt:
$-20 - 4t = 18 \iff -4t = 38 \iff t = -\frac{19}{2}$.

In beiden Fällen gilt nicht $0 \leq t \leq 5$.

**Ergebnis:**

Wenn die Spitze der Pyramide auf der Strecke $\overline{FG}$ liegt, so kann die Höhe der Pyramide nicht $\frac{18}{\sqrt{66}}$ LE betragen.

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix};\ a > 0$$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

**Lösung Aufgabe B 1 c)**

**Behauptung keine Gerade liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3,5$**

Ein Normalenvektor für die Ebene $x_3 = 3{,}5$ ist z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wenn eine der Geraden der Schar in der Ebene liegen soll, dann muss deren Richtungsvektor senkrecht zu $\vec{n}$ stehen, d.h. es muss $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} = 0$ gelten.

Nun ist aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-10a) + 1 \cdot \frac{2}{a} = \frac{2}{a} \neq 0$ für jedes $a$.

Eine entsprechende Gerade kann es somit nicht geben.

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

**Lösung Aufgabe B 1 c)**

**Gehört die Schnittgerade von $T$ und $U$ zu $g_a$?**

Wir bestimmen zunächst die Schnittgerade $h$ aus den beiden Koordinatengleichungen.

$$\text{I.}\quad 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$$

$$\text{II.}\ -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$$

Addieren beider Gleichungen liefert $8x_2 + 10x_3 = 35$.

Wir haben nur noch eine Gleichung mit zwei Unbekannten und können z.B. $x_3$ frei wählen, sagen wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$.

Damit folgt $8x_2 + 10t = 35 \Leftrightarrow x_2 = \frac{35}{8} - \frac{10}{8}t$.

$$\text{II.} -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$$
$$x_3 = t;\ x_2 = \frac{35}{8} - \frac{10}{8}t$$
$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix};\ a > 0$$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

Eingesetzt in Gleichung II. folgt

$$-5x_1 + 4\left(\frac{35}{8} - \frac{10}{8}t\right) + 5t = 5 \quad |\text{ausrechnen}$$

$$-5x_1 + \frac{35}{2} - 5t + 5t = 5 \quad |\text{vereinfachen}$$

$$-5x_1 + \frac{35}{2} = 5 \quad \left|-\frac{35}{2}\right.$$

$$-5x_1 = -\frac{25}{2} \quad |:(-5)$$

$$x_1 = \frac{5}{2}$$

Damit haben wir Lösungen für $x_1$, $x_2$ und $x_3$ und können diese als Geradengleichung für die Schnittgerade notieren:

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{35}{8} - \frac{10}{8}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{35}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{10}{8} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix};\ a > 0$

$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ \frac{35}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{10}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

Wir vergleichen nun die Gerade $h$ mit der Schar $g_a$.

Wenn $h$ mit einer der Geraden aus $g_a$ identisch sein soll, so müssen die Richtungsvektor Vielfache voneinander sein.

Es muss also $\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{10}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$ gelten.

In der dritten Koordinate lesen wir direkt $k = \frac{2}{a}$ ab.

Eingesetzt in der zweiten Koordinate erhält man $-10a = \frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{10}{8}\right)$.

Division durch $-10$ und Multiplikation mit $a$ liefert $a^2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ also $a = \frac{1}{2}$.
(Wegen $a > 0$ gibt es keine negative Lösung).

Wir wissen nun zumindest, dass $g_{\frac{1}{2}}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix};\ a > 0$$

# Wahlteil 2019 – Aufgabe B 1

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ \frac{35}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{10}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir wissen nun zumindest, dass $g_{\frac{1}{2}}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ parallel zu $h$ verläuft. Aber sind die Geraden auch identisch?

Wir prüfen, ob der Punkt $(2{,}5|0|3{,}5)$, also der Stützvektor von $g_{\frac{1}{2}}$, auf $h$ liegt.

$$\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ \frac{35}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{10}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir lesen die dritte Koordinate direkt ab und erhalten $t = 3{,}5 = \frac{7}{2}$.

Einsetzen in die zweite Koordinate folgt $\frac{35}{8} + \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{10}{8}\right) = \frac{35}{8} - \frac{35}{8} = 0$, also kein Widerspruch. Auch in der ersten Koordinate haben wir keinen Widerspruch.

**Ergebnis:** Mit $h = g_{\frac{1}{2}}$ gehört $h$ zur Schar $g_a$.