Abiturprüfung Mathematik 2019 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

Wahlteil Analytische Geometrie B2

Lösung der Aufgabe B 2

klaus_messner@web.de

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Aufgabe B 2

Die Punkte $A(6|6|0)$, $B(2|8|0)$ und $O(0|0|0)$ sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze $S(4|6|10)$.
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und $C(2|3|5)$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
(Teilergebnis: E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$)

(3 VP)

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die das Dreieck ABC als Grundfläche und den Punkt S als Spitze hat.

(4 VP)

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

c) In einem Koordinatensystem, bei dem die x_1x_2-Ebene den Erdboden beschreibt, stellt die Pyramide $ABOS$ ein Kunstwerk dar (Koordinatenangaben in m).
An der Stelle, die durch den Punkt $F(8|3|0)$ beschrieben wird, steht ein Mast senkrecht auf dem Erdboden. Auf den Mast treffendes Sonnenlicht lässt sich durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschreiben.
Der Schattenpunkt der Mastspitze liegt auf der Kante des Kunstwerks, die durch die Strecke OS beschrieben wird.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Höhe des Masts rechnerisch bestimmen kann.

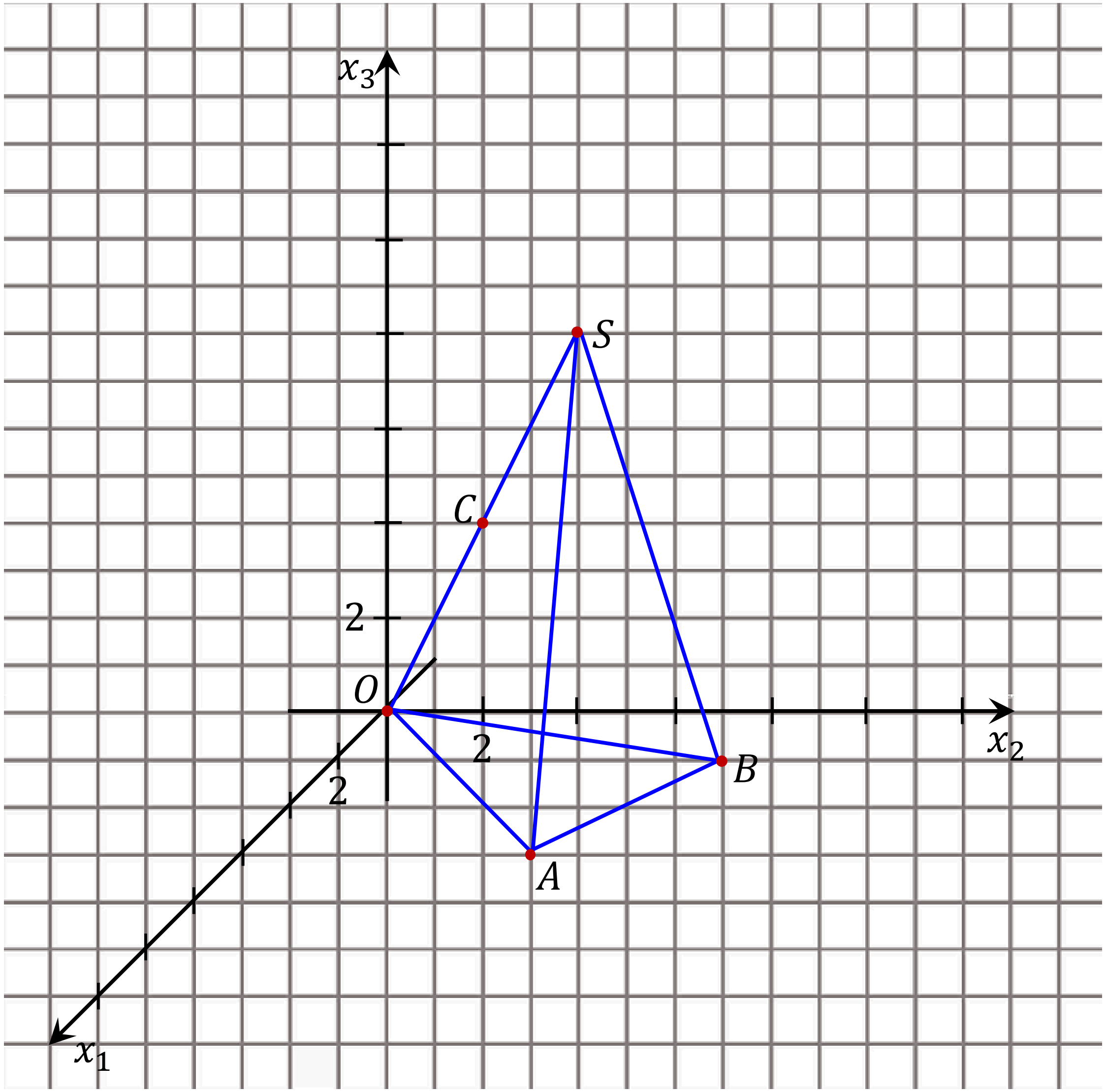
(3 VP)

$A(6|6|0)$
$B(2|8|0)$
$C(2|3|5)$
$O(0|0|0)$
$S(4|6|10)$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Lösung Aufgabe B 2 a)

Darstellung der Pyramide im Koordinatensystem



$A(6|6|0)$
$B(2|8|0)$
$C(2|3|5)$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Koordinatengleichung der Ebene E

Wir bilden zunächst zwei Richtungsvektoren der Ebene E,

z.B. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Mit dem Kreuzprodukt erhält

man daraus einen Normalenvektor für E.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{array}{cc} \cancel{-4} & \cancel{-4} \\ 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ -4 & -4 \\ 2 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{5} \end{array} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Da es auf die Länge nicht ankommt, teilen wir durch 10 und erhalten

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor für E.

$A(6|6|0)$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Damit haben wir $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$ mit einem noch unbekannten d.

Da z.B. A in E liegt können wir d durch Einsetzen bestimmen:

$1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18 = d.$

Ergebnis:

Die Koordinatengleichung für E lautet $\underline{E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18}$.

$A(6|6|0)$
$B(2|8|0)$
$C(2|3|5)$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Lösung Aufgabe B 2 b)

Behauptung: Dreieck ABC ist gleichschenklig

Wir vermuten anhand der Koordinaten, dass die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind und rechnen nach:

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\8\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\-3\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

Ergebnis: Das Dreieck ABC ist wie behauptet gleichschenklig.

$A(6|6|0)$
$B(2|8|0)$
$C(2|3|5)$
$S(4|6|10)$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Volumen der Pyramide $\boldsymbol{ABCS}$

Das Volumen einer Pyramide ergibt sich aus der Formel $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei G die Grundfläche, also die Fläche des Dreiecks ABC ist und h die Höhe der Pyramide (also der Abstand des Punktes S zu der Ebene in der die Punkte ABC liegen).

Daraus ergibt sich der folgende „Fahrplan“:

1) Fläche des Dreiecks ABC ausrechnen
2) Abstand von S zu E bestimmen (Koordinatengleichung für E haben wir bereits), denn das ist die Pyramidenhöhe.
3) Zwischenergebnisse in die Formel einsetzen und ausrechnen.

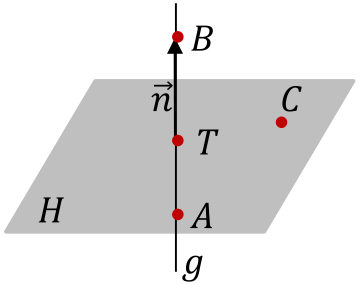
$A(6|6|0)$
$B(2|8|0)$
$C(2|3|5)$
$S(4|6|10)$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

1) Fläche des Dreiecks ABC

Wir wählen willkürlich die Strecke $\overline{AB}$ als Grundseite des Dreiecks ABC und bestimmen nun den Abstand des Punktes C zu $\overline{AB}$, denn dies ist die Höhe des Dreiecks.

Dazu konstruieren wir zunächst eine Hilfsebene H, senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$, so dass C auf H liegt.



Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ haben wir bereits einen Normalenvektor für H. Aber etwas einfacher wird es, wenn wir durch 2 teilen, da es ja auf die Länge nicht ankommt. Also nehmen wir $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor für H und haben somit: $H\colon\ -2x_1 + x_2 = d$ mit einem noch unbekannten d.

$H\colon\ -2x_1 + x_2 = d$
$A(6|6|0)$
$B(2|8|0)$
$C(2|3|5)$

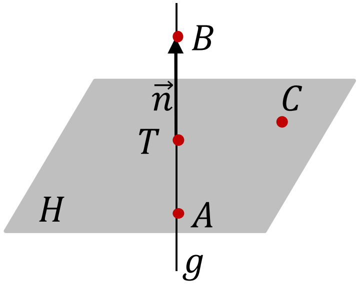
Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Da C in H liegt, können wir C einsetzen, um d zu bekommen. Es folgt:

$-2 \cdot 2 + 3 = -1$ und damit $H\colon\ -2x_1 + x_2 = -1$.

Die Gleichung der Geraden g, auf der A und B liegen, lautet

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



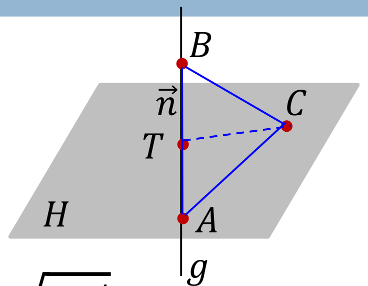
Damit bestimmen wir den Schnittpunkt T von g mit H durch Einsetzen (von g in H). Es folgt:

$$-2(6-4t) + (6+2t) = -1 \iff -6 + 10t = -1 \overset{+6\,|\,:10}{\iff} t = \frac{1}{2}$$

Einsetzen in g liefert: $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ also $T(4|7|0)$.

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

$A(6|6|0)$
$B(2|8|0)$
$T(4|7|0)$
$C(2|3|5)$



Die Länge der Strecke $\overline{TC}$ ist schließlich die Höhe im Dreieck ABC (auf die Seite $\overline{AB}$). Es folgt:

$$h = \left|\overrightarrow{TC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{45}$$

Wir haben außerdem $g = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$ und damit

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2}\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = \frac{\sqrt{4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9}}{\sqrt{4}} = 5 \cdot 3 = 15.$$

$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$
$S(4|6|10)$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

2) Abstand der Pyramidenspitze S zur Ebene E

Zunächst bilden wir die HNF der Ebene E.

Die Länge des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$\vec{n} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Damit haben wir HNF E: $\frac{x_1+2x_2+2x_3-18}{3} = 0$.

Einsetzen von S und Betragsbildung im Zähler liefert den Abstand:

$$d = \frac{|4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 - 18|}{3} = 6$$

Die Höhe der Pyramide $ABCS$ beträgt somit $h_{Pyramide} = 6$.

$G = A_{Dreieck} = 15$
$h_{Pyramide} = 6$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

3) Zwischenergebnisse einsetzen

Mit $V_{Pyramide} = \frac{1}{3}Gh$ folgt nun $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 6 = 30$

Ergebnis: Die Pyramide $ABCS$ hat ein Volumen von 30 LE³.

Das war der schwierige Weg!

$F(8|3|0), S(4|6|10)$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

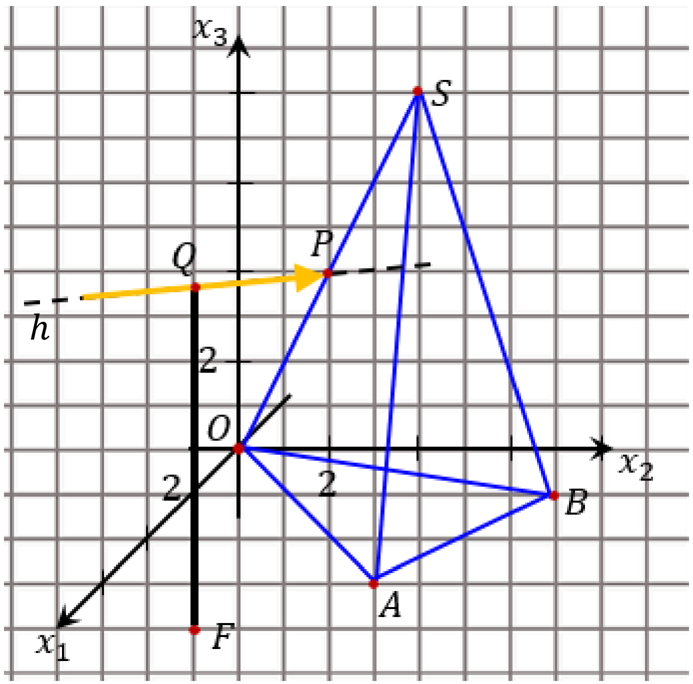
Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Lösung Aufgabe B 2 c)

Wie kann man die Höhe des Mastes bestimmen?

Die Gerade durch die Punkte O und S hat die

Gleichung $g: \vec{x} = t\overrightarrow{OS} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.



Ein Punkt R auf g hat folglich die Koordinaten $R(4t|6t|10t)$.

Mit $\vec{r}$ als Stützvektor und $\vec{v}$ als Richtungsvektor kann man die Geradengleichung für die Gerade h aufstellen, die g schneidet.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4t \\ 6t \\ 10t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

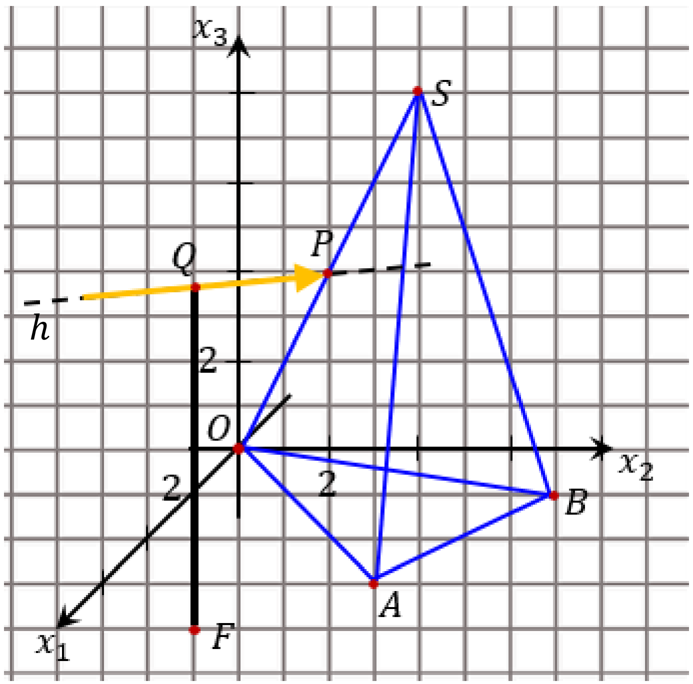
$F(8|3|0)$

$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4t \\ 6t \\ 10t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Die Geradengleichung für die Gerade,

auf der der Mast liegt lautet $k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Gleichsetzen der Geraden h und k liefert ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten.

Durch die Lösung des linearen Gleichungssystems kommen wir zum Schnittpunkt Q.

Die Länge $\left|\overrightarrow{FQ}\right|$ ist dann die Höhe des Stabes.

$F(8|3|0)$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4t \\ 6t \\ 10t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Wir gehen nun über die Aufgabenstellung hinaus und berechnen die Höhe des Mastes konkret. Gleichsetzen von h und k liefert:

$$\begin{pmatrix} 4t \\ 6t \\ 10t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Big| -r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

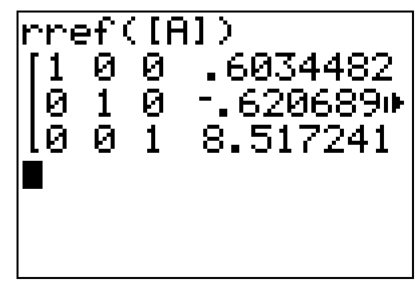
$$\begin{pmatrix} 4t \\ 6t \\ 10t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem

I. $\quad 4t - 9s \qquad = 8$

II. $\quad 6t \ + s \qquad = 3$

III. $10t - 4s - r = 0$



Mit dem GTR erhält man eine eindeutig Lösung. Insbesondere gilt $r \approx 8{,}517$.

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wahlteil 2019 – Aufgabe B 2

Einsetzen von $r \approx 8{,}517$ in k liefert uns die Spitze Q des Mastes, nämlich $Q(8|3|8{,}517)$.

Da der Mast am Boden aufsetzt, kann man die Höhe an der x_3-Kooridnate der Spitze ablesen.

Ergebnis: Der Mast hat eine Höhe von etwa 8,5 LE.