Abiturprüfung Mathematik 2019 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

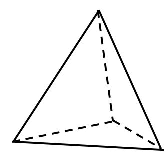
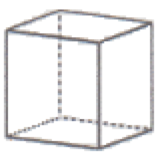
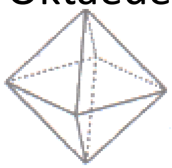
Wahlteil Stochastik C 1

Lösung der Aufgabe C 1

klaus_messner@web.de

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

Betrachtet werden Körper, die auf jeder Seitenfläche mit einer Zahl beschriftet sind.

Körper	Tetraeder 	Würfel 	Oktaeder 
Anzahl Seitenflächen	vier	sechs	acht
Beschriftet mit	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Beim Werfen eines Körpers gilt die Zahl als geworfen, auf der der Körper zum Liegen kommt. Dabei werden bei jedem Körper die möglichen Zahlen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit geworfen.

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

a) Ein Tetraeder wird 100-mal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
A: „Die Zahl 1 wird genau 30-mal geworfen."
B: „Die Zahl 1 wird mindestens 20-mal geworfen."

(1,5 VP)

b) Ermitteln Sie, wie oft man ein Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\ \%$ mindestens einmal die Zahl 1 zu werfen.

(2 VP)

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

c) Ein Tetraeder, ein Würfel und ein Oktaeder werden gleichzeitig geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
C: „Bei allen drei Körpern wird dieselbe Zahl geworfen.“
D: „Die Summe der geworfenen Zahlen beträgt 17.“

(2,5 VP)

d) Für einen Einsatz von 50 Cent darf ein Spieler ein Tetraeder und ein Würfel einmal werfen. Anschließend erhält er die Anzahl der geworfenen Einsen in Euro ausbezahlt.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers.

(2 VP)

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

e) In einem Sack befinden sich 20 Körper. Es handelt sich dabei um Tetraeder und Oktaeder, wie sie oben beschrieben sind. Einer dieser Körper wird zufällig gezogen und anschließend geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei die Zahl 2 zu werfen, beträgt $15\ \%$. Berechnen Sie die Anzahl der Tetraeder im Sack.

(2 VP)

A: „1 wird genau 30-mal geworfen.“
B: „1 wird mindestens 20-mal geworfen.“

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

Lösung Aufgabe C 1 a)

Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der „Treffer“ in $n = 100$ Versuchen misst. Die Trefferwahrscheinlichkeit beim Tetraeder ist $p = \frac{1}{4}$. Damit folgt:

$$P(A) = P(X = 30) = \binom{100}{30}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}\left(\frac{3}{4}\right)^{70} \approx 0{,}046 = 4{,}6\%$$

Eingabe im GTR: 2ND DISTR binompdf(100,0.25,30)

$$P(B) = P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0{,}9 = 90\%$$

Eingabe im GTR: 1-2ND DISTR binomcdf(100,0.25,19)

Ergebnis:

Ereignis A tritt ein mit einer Wahrscheinlichkeit von $4{,}6\%$ und Ereignis B mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%.

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

Ermitteln Sie, wie oft man ein Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einmal die Zahl 1 zu werfen.

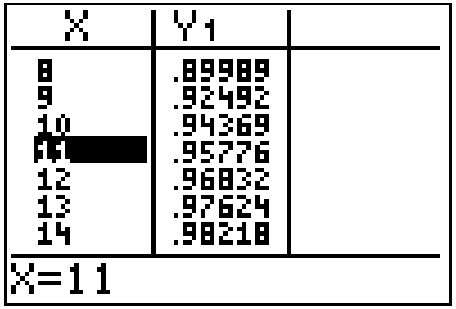
Lösung Aufgabe C 1 b)

Mindestanzahl Würfe

Wieder sei X die Anzahl der Treffer. Gesucht ist eine Anzahl n von Versuchen so dass $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$ gilt. Wir formen dies um zu $1 - P(X = 0) \geq 0{,}95$.

Hier lässt sich n mit Hilfe einer Wertetabelle mit dem GTR ermitteln.

Dazu gibt man den Ausdruck 1-binompdf(X,0.25,0) im Y-Editor des GTR ein und lässt sich mit 2ND TABLE die Wertetabelle anzeigen. Dort liest man $X = 11$ (also $n = 11$) ab.



X	Y1
8	.89989
9	.92492
10	.94369
11	.95776
12	.96832
13	.97624
14	.98218

X=11

Ergebnis: Man braucht mindestens 11 Versuche, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mit dem Tetraeder mindestens einmal eine 1 wirft.

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

Zur Übung können wir den Ausdruck von eben auch „per Hand“ umformen. Aber den Taschenrechner brauchen wir am Ende doch.

$$1 - P(X = 0) \geq 0{,}95 \iff 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0{,}95 \iff$$

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0{,}95 \qquad |-1$$

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^n \geq -0{,}05 \qquad |\cdot(-1)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0{,}05 \qquad |\ln$$

$$n \cdot \ln\frac{3}{4} \leq \ln 0{,}05 \qquad |:\ln\frac{3}{4}$$ Division durch negative Zahl!

$$n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}75} = 10{,}41$$

Da n ganzzahlig ist, gilt wiederum $n \geq 11$.

C: „Bei allen drei Körpern wird dieselbe Zahl geworfen."
D: „Die Summe der geworfenen Zahlen beträgt 17."

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

Lösung Aufgabe C 1 c)

Ereignis C

Darstellung als Menge: $C = \{(1{,}1{,}1), (2{,}2{,}2), (3{,}3{,}3), (4{,}4{,}4)\}$

Für jeden Wert n gilt $P(n, Tetraeder) = \frac{1}{4}$, $P(n, Würfel) = \frac{1}{6}$ bzw. $P(n, Oktaeder) = \frac{1}{8}$. Damit folgt:

$$\underline{P(C)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{48} \approx 0{,}021 = \underline{2{,}1\%}$$

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

C: „Bei allen drei Körpern wird dieselbe Zahl geworfen.“
D: „Die Summe der geworfenen Zahlen beträgt 17.“

Ereignis D

Die Summe 17 kann erreicht werden durch die Kombinationen $(8{,}6{,}3)$, $(8{,}5{,}4)$ und $(7{,}6{,}4)$.

Jede der Kombinationen hat dieselbe WS von $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}$.

Es folgt:

$$\underline{P(D)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{1}{64} \approx 0{,}016 = \underline{1{,}6\%}$$

Ergebnis:
Ereignis C hat eine WS von $2{,}1\%$ und Ereignis D hat eine WS von $1{,}6\%$.

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

Tetraeder, Würfel
Auszahlbeträge:
0 Einsen => 0€
1 Eins => 1€
2 Einsen => 2€

Lösung Aufgabe C 1 d)

Erwartungswert

Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Einsen. Somit gilt $X \in \{0,1,2\}$.

Mit $P(1; Tetraeder) = \frac{1}{4}$, $P(Keine\ 1, Tetraeder) = \frac{3}{4}$, $P(1; Würfel) = \frac{1}{6}$, $P(Keine\ 1, Würfel) = \frac{5}{6}$ folgt:

$$P(X = 0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{24}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

Der „reine“ Erwartungswert ist daher:

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = \frac{8}{24} + \frac{2}{24} = \frac{10}{24}$$

Erwartungswert $E(X) = \frac{10}{24}$
Einsatz 0,5 €

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

Vom „reine“ Erwartungswert muss aber noch der Einsatz abgezogen werden, denn gesucht ist der **Erwartungswert des Gewinns**!

Es folgt: $E_{Gewinn}(X) = \frac{10}{24} - \frac{1}{2} = \frac{10}{24} - \frac{12}{24} = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12} \approx -0{,}083$

Ergebnis: Der erwartete Verlust des Spiels beträgt etwa 8,3 Cent.

Wahlteil 2019 – Aufgabe C 1

Lösung Aufgabe C 1e)

Anzahl der Tetraeder

Wir bezeichnen die Anzahl der Tetraeder mit x.

Das Ereignis „2" kommt zustande durch A = Ziehung Tetraeder und Würfeln der 2 oder durch B = Ziehung Oktaeder und Würfeln der 2.

Damit ist $P(2) = \frac{x}{20} \cdot \frac{1}{4} + \frac{(20-x)}{20} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}15$. Dies lösen wir nach x auf:

$\frac{2x}{160} + \frac{20}{160} - \frac{x}{160} = 0{,}15 \quad |$Ausrechnen

$\frac{x}{160} + \frac{20}{160} = 0{,}15 \qquad |\cdot 160$

$x + 20 = 24 \Rightarrow \; x = 4$

Ergebnis: In dem Sack befinden sich 4 Tetraeder (und 16 Oktaeder).