Abiturprüfung Mathematik 2020 Baden-Württemberg

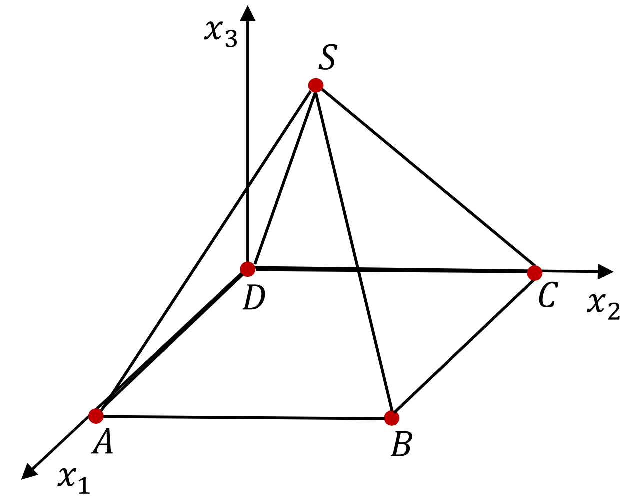
Allgemeinbildende Gymnasien

Wahlteil Analytische Geometrie B 1

Lösung der Aufgabe B 1

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

Aufgabe B 1



Ein Ausstellungsraum hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte des Bodens können in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch die Punkte $A(18|0|0)$, $B(18|18|0)$, $C(0|18|0)$ und $D(0|0|0)$ dargestellt werden (siehe Abbildung). Die Spitze des Raumes wird durch den Punkt $S(9|9|12)$ beschrieben, die rechte Seitenwand durch das gleichschenklige Dreieck BCS (alle Koordinatenangaben in Meter).

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den Kanten, die durch die Strecken BC und BS beschrieben werden.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der das Dreieck BCS liegt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der rechten Seitenwand.
(Teilergebnis: $E\colon\ 4x_2 + 3x_3 = 72$)

(5 VP)

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

Eine punktförmige Lampe befindet sich am unteren Ende einer fünf Meter langen Stange, die von der Raumspitze ausgeht und senkrecht nach unten hängt.

b) Die Stange mit der Lampe kann in eine Pendelbewegung versetzt werden. Diese Pendelbewegung verläuft im Modell in einer Ebene parallel zur x_2x_3-Ebene.
Wenn die Lampe zu stark schwingt, dann trifft sie die rechte Seitenwand. Der Auftreffpunkt wird im Modell durch den Punkt P beschrieben. Berechnen Sie die Koordinaten von P.

(5 VP)

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

c) Im Rahmen einer Kunstausstellung wurde ein drei Meter langer Stab senkrecht zum Boden angebracht, der im Modell durch die Strecke FG mit $F(11|15|0)$ beschrieben wird. Befindet sich die Lampe in der Position, die durch $L(9|9|7)$ beschrieben wird, so wirft der Stab einen Schatten, dessen Endpunkt auf der rechten Seitenwand durch G^* beschrieben wird.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G^*.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Gesamtlänge des betrachteten Schattens berechnen kann.

(3 VP)

$B(18|18|0)$
$C(0|18|0)$
$S(9|9|12)$

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

Lösung Aufgabe B 1 a)

Winkel zwischen den Kanten BC und BS

Mit den Punkte B, C und S erhalten wir die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$.

Es gilt:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Für die Winkelberechnung brauchen wir die Winkelformel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BS}\right|}$$

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

Es folgt $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-18)^2} = 18$

und $\left|\overrightarrow{BS}\right| = \sqrt{(-9)^2 + (-9)^2 + 12^2} = \sqrt{306}$

und weiter $\left|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = 162$

Einsetzen in die Winkelformel liefert $\cos(\alpha) = \frac{162}{18 \cdot \sqrt{306}} \approx 0{,}5145.$

Mit 2ND cos lässt sich daraus der Winkel ermitteln: $\alpha \approx 59°$.

Achten Sie darauf, dass der Taschenrechner im Gradmaß rechnet!

Ergebnis: Der Winkel α zwischen BC und BS beträgt etwa $\underline{59°}$.

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

$B(18|18|0)$
$C(0|18|0)$
$S(9|9|12)$

Koordinatengleichung der Ebene in der das Dreieck BCS liegt

Die zwei Richtungsvektoren $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$ haben wir bereits im vorherigen Aufgabenteil bestimmt. Da es auf die Länge der Vektoren nicht ankommt teilen wir $\overrightarrow{BC}$ durch -18 und $\overrightarrow{BS}$ durch -3. Damit lässt sich nachher leichter rechnen. Wir haben somit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ als neue Richtungsvektoren und bilden daraus mit Hilfe des Vektorprodukts einen Normalenvektor:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{3} \\ 0 & 3 \\ 0 & -4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \cdot -4 \\ 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot -4 \\ 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$C(0|18|0)$

Die Einträge des Normalenvektors sind bekanntlich die Koeffizienten in der Koordinatenform. Daher ergibt sich $4x_2 + 3x_3 = d$ mit einem noch unbekannten Wert d.

Da z.B. C in der Ebene liegt, können wir d durch Einsetzen ermitteln:

$$4 \cdot 18 + 3 \cdot 0 \; = d = 72$$

Ergebnis: Die Koordinatengleichung der Ebene E, in der das Dreieck BCS liegt, lautet $E\colon\; 4x_2 + 3x_3 = 72$.

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

$B(18|18|0)$
$C(0|18|0)$
$S(9|9|12)$

Fläche der rechten Seitenwand

Den Mittelpunkt M der Grundseite BC erhält man aus der Rechnung $\frac{B+C}{2}$ mit $M(9|18|0)$. Damit ist die Strecke MS die Höhe des Dreiecks BCS. Deren Länge ist

$$\left|\overrightarrow{MS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$

Die Länge der Grundseite BC ist 18.

Die Fläche des Dreiecks BCS ist schließlich gegeben mit

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{MS}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 18 = 135$$

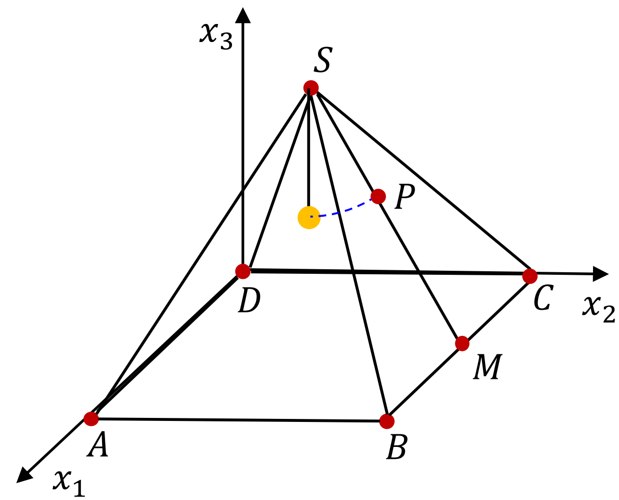
Ergebnis: Die Seitenwand BCS hat einen Flächeninhalt von $\underline{135}$ LE².

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

$B(18|18|0)$
$C(0|18|0)$
$S(9|9|12)$

b) Koordinaten des Auftreffpunkts P

Da es sich um eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche handelt und die Spitze mittig über der Grundfläche steht, trifft die Lampe beim Schwingen irgendwo auf der Strecke MS auf, wobei M der Mittelpunkt der Strecke BC ist.



Es gilt $M = \frac{1}{2}(B + C) = (9|18|0)$.

Die Gerade auf der die Strecke SM liegt kann beschrieben werden durch:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Punkt P auf der Strecke SM hat somit die Koordinaten $P(9|9 + 9t|12 - 12t)$ mit $t \geq 0$.

Wir müssen somit einen (positiven!) Wert für t finden, so dass die Länge der Strecke SP genau der Länge des Stabes (5 m) entspricht.

$S(9|9|12)$
$P(9|9+9t|12-12t)$

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

Mit $\left|\overrightarrow{SP}\right| = 5$ folgt nun $\left|\begin{pmatrix} 9 \\ 9+9t \\ 12-12t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 9t \\ -12t \end{pmatrix}\right| = 5$

$\Rightarrow \sqrt{81t^2 + 144t^2} = 5 \;\Rightarrow\; \sqrt{225t^2} = 5 \;\Rightarrow\; 15t = 5 \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{3}.$

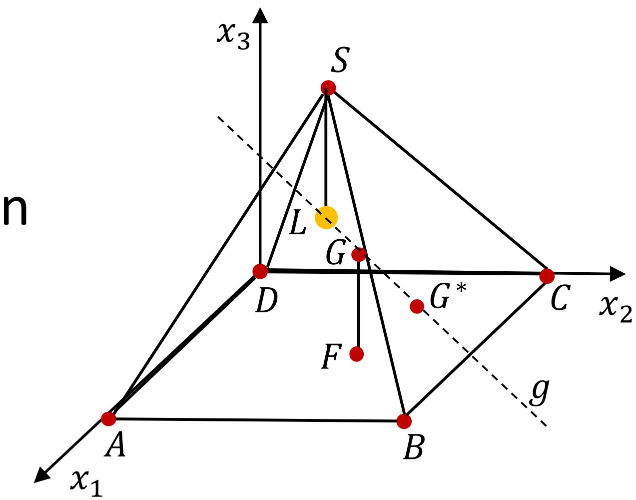
Einsetzen in P liefert $P(9|9+3|12-4) \Rightarrow P(9|12|8)$.

Ergebnis:

Die Lampe trifft beim Punkt $\underline{P(9|12|8)}$ auf der rechten Seitenwand auf.

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

c) Koordinaten des Schattenpunktes G^*



Wir zeichnen zunächst den Stab in die Skizze ein.
Da der Stab 3m lang ist hat die Spitze die Koordinaten $G(11|15|3)$. Wenn wir die Gerade g durch L und G berechnen, dann erhalten wir G^* als Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene in der die rechte Seitenwand liegt.

Es folgt g: $\vec{x} = \overrightarrow{OL} + t\overrightarrow{LG} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Die Ebene in der die rechte Seitenwand liegt hat die Koordinatengleichung E: $4x_2 + 3x_3 = 72$, siehe Teilsufgabe a).

Durch Einsetzen von g in E lässt sich nun ein konkreter Wert für t bestimmen.
Aus der Geradengleichung lesen wir ab $x_2 = 9 + 6t$ und $x_3 = 7 - 4t$.

$$x_2 = 9 + 6t$$
$$x_3 = 7 - 4t$$
$$E:\ 4x_2 + 3x_3 = 72$$
$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

Einsetzen von x_2 und x_3 in E liefert:

$$4(9 + 6t) + 3(7 - 4t) = 72 \quad \Leftrightarrow \quad 36 + 24t + 21 - 12t = 72$$

$$\Leftrightarrow \quad 57 + 12t = 72 \quad \Leftrightarrow \quad 12t = 15 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

Einsetzen in g ergibt $\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}5 \\ 16{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

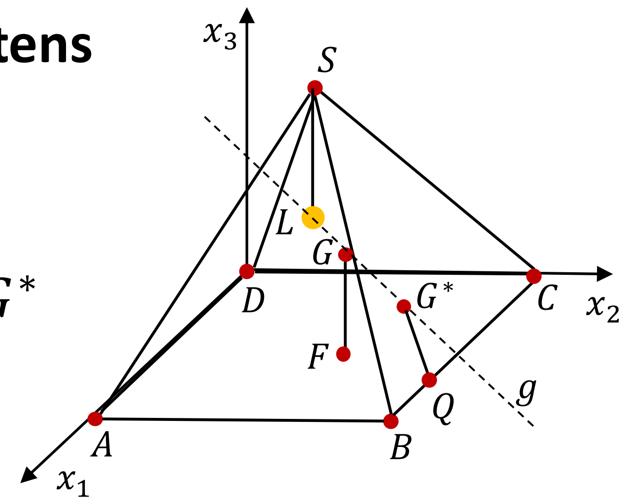
Dies ist der Ortsvektor, der zu G^* führt.

Ergebnis:

Der Schattenpunkt G^* des Stabes auf der rechten Seitenwand hat die Koordinaten $\underline{G^*(11{,}5|16{,}5|2)}$.

Wahlteil 2020 – Aufgabe B 1

Verfahren mit dem man die Gesamtlänge des Schattens an der rechten Seitenwand ermitteln kann.



Schritt 1: Man bestimmt aus den Punkten F, G und G^* eine Hilfsebene H.

Schritt 2: Man berechnet die Schnittgerade h von H mit E (die Ebene, in der die rechte Seitenwand liegt).

Schritt 3: Man bestimme den Schnittpunkt Q von h mit der Geraden auf der die Kante BC liegt.

Schritt 4: Die Länge der Strecke G^*Q ist dann die Länge des Schattenwurfs.