Abiturprüfung Mathematik 2020 Baden-Württemberg

Allgemeinbildende Gymnasien

Wahlteil Stochastik C 2

Lösung der Aufgabe C 2

klaus_messner@web.de

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

In einer Urne befinden sich drei rote, eine weiße und sechs schwarze Kugeln.

a) Es werden nacheinander acht Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: Genau drei dieser Kugeln sind rot.
B: Mehr als zwei und weniger als sechs dieser Kugeln sind rot.
C: Die ersten drei Kugeln haben dieselbe Farbe.

(3 VP)

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

b) Geben Sie im Zusammenhang mit der oben beschriebenen Urne ein Zufallsexperiment und ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2$$

(1,5 VP)

c) Bei einem Spiel werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Ist die weiße Kugel dabei, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück. Bei zwei Kugeln mit gleicher Farbe erhält er vier Euro ausbezahlt. In allen anderen Fällen gibt es keine Auszahlung.
Bestimmen Sie die Höhe des Einsatzes, so dass dieses Spiel fair ist.

(2,5 VP)

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

d) In einer anderen Urne befinden sich 200 schwarze und fünf rote Kugeln. Ein Spieler zieht 15-mal nacheinander eine Kugel und legt sie jeweils direkt wieder zurück. Er gewinnt, wenn er mindestens eine rote Kugel zieht. Berechnen Sie seine Gewinnwahrscheinlichkeit.

Dem Spieler wird folgendes Angebot gemacht. Er kann auf Züge verzichten, dafür werden weitere rote Kugeln in die Urne gelegt. Der Spieler muss vor dem Ziehen erklären, auf wie viele Züge er verzichtet. Für jeden weggelassenen Zug werden zwei rote Kugeln zusätzlich in die Urne gelegt.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zahl z der weggelassenen Züge berechnet werden kann.
Ermitteln Sie auf wie viele Züge er verzichten muss, damit seine Gewinnwahrscheinlichkeit am größten ist.

(3 VP)

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

3 r, 1 w, 6 s
insgesamt 10 Kugeln
Experiment: Ziehen mit Zurücklegen
n=8 Ziehungen

Lösung C 2 a)

A: Genau drei dieser Kugeln sind rot

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln.

X ist binomialverteilt, da es sich um ein Ja/Nein-Experiment (rot bzw. nicht rot) handelt.

Die Trefferwahrscheinlichkeit für „rot" ist $p = \frac{3}{10}$, die Wahrscheinlichkeit für „nicht rot" ist $q = \frac{7}{10}$. Mit der Formel für die Binomialverteilung erhält man:

$$\underline{P(X = 3)} = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^5 \approx 0{,}254 = \underline{25{,}4\%}$$

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

3 r, 1 w, 6 s
insgesamt 10 Kugeln
Experiment: Ziehen mit Zurücklegen
n=8 Ziehungen

B: Mehr als zwei und weniger als sechs dieser Kugeln sind rot.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln.

Damit gilt $P(B) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$P(X = 3) \approx 0{,}254$ (siehe vorherige Aufgabe)

$$P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 \approx 0{,}136$$

$$P(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 \approx 0{,}047$$

Es folgt $\underline{P(B)} \approx 0{,}254 + 0{,}136 + 0{,}047 = \underline{0{,}437}$

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

3 r, 1 w, 6 s
insgesamt 10 Kugeln
Experiment: Ziehen mit Zurücklegen
n=8 Ziehungen

C: Die ersten drei Kugeln haben dieselbe Farbe.

Für eine einzelne Ziehung gilt $P(r) = 0{,}3$, $P(w) = 0{,}1$ und $P(s) = 0{,}6$.

Es folgt $P(C) = P(rrr) + P(www) + P(sss) = 0{,}3^3 + 0{,}1^3 + 0{,}6^3 = 0{,}244$

Ergebnis:

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind $\underline{P(A)} = 0{,}254 = \underline{25{,}4\%}$, $\underline{P(B)} = 0{,}437 = \underline{43{,}7\%}$ und $\underline{P(C)} = 0{,}244 = \underline{24{,}4\%}$.

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

b) Bedeutung des Terms $\boldsymbol{\binom{5}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2}$

Die Wahrscheinlichkeit in einer Einzelziehung eine schwarze Kugel zu ziehen beträgt $\frac{6}{10} = 0{,}6$.

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit irgendeine andere als eine schwarze Kugel zu ziehen gleich $1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Der obige Term gibt demnach die Wahrscheinlichkeit dafür an, in 5 Ziehungen (mit Zurücklegen) genau 3 schwarze Kugeln zu bekommen.

3 r, 1 w, 6 s
insgesamt 10 Kugeln
Experiment: Ziehen ohne Zurücklegen
n=2 Ziehungen

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

c) Höhe des Einsatzes

Wir modellieren die verschiedenen Gewinne mit der Zufallsvariablen X.

X kann die Werte x, 4 und 0 (Euro) annehmen, wobei x für den Einsatz steht, den wir noch nicht kennen.

Wenn das Spiel fair sein soll, muss der Erwartungswert genau dem Einsatz entsprechen, d.h. es muss $E(X) = x$ gelten.

Damit ergibt sich $x \cdot P(X = x) + 4 \cdot P(X = 4) + 0 \cdot P(X = 0) = x$.

Es gilt $P(X = x) = P(w, \overline{w}) + P(\overline{w}, w) + P(w, w) = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + 0 = 0{,}2$

$P(X = 4) = P(r, r) + P(s, s) + P(w, w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + 0 = \frac{36}{90} = 0{,}4$

Damit folgt $x \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}4 = x$

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

3 r, 1 w, 6 s
insgesamt 10 Kugeln
Experiment: Ziehen ohne Zurücklegen
n=2 Ziehungen

$$0{,}2x + 1{,}6 = x \;\Leftrightarrow\; 1{,}6 = 0{,}8x \Leftrightarrow\; x = 2$$

Ergebnis: Bei einem Einsatz von 2€ ist das Spiel fair.

200 s, 5 r
205 Kugeln gesamt
15 Ziehungen mit Zurücklegen

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

d) Gewinnwahrscheinlichkeit

Die für „rot“ Wahrscheinlichkeit in einer Einzelziehung ist $p = \frac{5}{205}$.

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für „nicht rot“ $q = \frac{200}{205}$.

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der roten Kugeln in 15 Ziehungen.

Damit erhalten wir

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{200}{205}\right)^{15} \approx 0{,}31$$

Ergebnis:

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine rote Kugel in 15 Ziehungen beträgt etwa 31%.

200 s, 5 r
205 Kugeln gesamt
15 Ziehungen mit Zurücklegen

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

Term für Wahrscheinlichkeit

Es sei z die Anzahl der weggelassenen Züge. Bei ursprünglich 15 Ziehungen haben wir nun nur noch $15 - z$ Ziehungen.

Für jede Auslassung werden 2 rote Kugeln hinzugelegt. Bei z Auslassungen haben wir somit $205 + 2z$ Kugeln insgesamt.

Von den $205 + 2z$ Kugeln sind immer noch 200 Kugeln schwarz.

Die Wahrscheinlichkeit für „mindestens eine rote Kugel" ist daher

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{200}{205 + 2z}\right)^{15-z}$$

Ergebnis:

Der Term für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $1 - \left(\frac{200}{205+2k}\right)^{15-z}$.

200 s, 5 r
205 Kugeln gesamt
15 Ziehungen mit Zurücklegen

Wahlteil 2020 – Aufgabe C 2

Anzahl Auslassungen für maximale Gewinnchance

Da z die Werte 0 bis 15 annehmen kann, lässt sich mit dem Taschenrechner einfach ausprobieren, für welchen Wert von z der Ausdruck

$$1-\left(\frac{200}{205+2z}\right)^{15-z}$$

maximal wird.

Dies ist für $z=6$ der Fall und die Gewinnwahrscheinlichkeit liegt damit bei ca. 52%.

Ergebnis:

Wenn der Spieler 6 Ziehungen auslässt, hat er die höchste Gewinnchance.