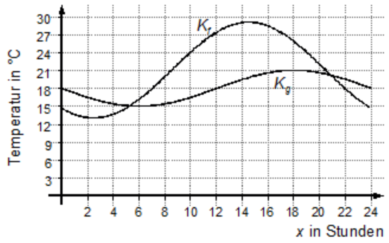
Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg Allgemeinbildende Gymnasien Wahlteil – Analysis I

Lösung der Aufgabe 2

Klaus Messner, klaus_messner@web.de

Aufgabe I 2 (Schwerpunkt: Trigonometrie)

Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion f mit



$$f(x)=8\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]+21;\quad 0\le x\le 24$$

beschrieben werden (x in Stunden, f(x) in °C).
Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf K_g.

a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist. Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens 22°C?
Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten? Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.
(5 VP)

b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion g, der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt.
Beschreiben Sie, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y=\sin x$ entsteht.
Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an.
Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten?
(7 VP)

c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch eine Funktion h mit

$$h(x)=10\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]+ax+b;\quad 24\le x\le 48$$

beschrieben werden kann (x in Stunden, h(x) in °C). Dabei stimmen zum Zeitpunkt x=24 sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein.
Ermitteln Sie a und b.
Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term ax + b bestimmt wird.
(6 VP)

Lösung:

a) Geben Sie f(x) im Y-Editor Ihres GTR ein und lassen Sie sich im Bereich $x_{min}=0$, $x_{max}=24$, $y_{min}=0$, $y_{max}=30$ den Graphen anzeigen.

Minimale, maximale Temperatur:
Mit **2ND CALC minimum** bestimmen Sie das Minimum im Intervall [0;6] und erhalten x=2,5 und y=13. Entsprechend bestimmen Sie das Maximum mit **2ND CALC maximum** im Intervall [12;18] und erhalten x=14,5 und y=29.

Ergebnis: Die minimale Temperatur ist um 2:30 Uhr erreicht und beträgt dort 13°C. Die maximale Temperatur ist um 14:30 Uhr erreicht und beträgt dann 29°C.

Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens 22°C?
Anhand des Schaubildes sehen Sie, dass es zwei Zeitpunkte gibt für die f(x)=22 gilt. Zwischen diesen Zeitpunkten ist die Temperatur höher, davor und danach niedriger. Lösen Sie also mit dem GTR die Gleichung f(x)-22=0. Den Gleichungslöser finden Sie über **MATH solver.** In der Eingabezeile wählen Sie mit **VARS** die Variable $\mathbf{Y_1}$ und tippen **ENTER.** Geben Sie den Startwert z.B. mit X=8 vor und starten Sie den Berechnungsvor-gang mit **ALPHA SOLVE.** Sie erhalten X=8,98.

Wiederholen Sie den Vorgang mit einem anderen Startwert, z.B. X=20. Sie bekommen X=20,02. Das bedeutet, dass in einer Zeitspanne von 24-(20,02-8,98)=12,96 also etwa 13 Stunden lang die Temperatur höchstens 22°C beträgt.

Ergebnis: Etwa 13 Stunden lang beträgt die Temperatur höchstens 22°C.

Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten?
Gesucht ist nun der Wendepunkt auf der linken Seite des Hochpunkts. Mit dem GTR lassen Sie sich nach Eingabe von **nDeriv(Y1;X;X)** im Y-Editor für $\mathbf{Y_2}$ die Ableitungskurve zeichnen. Deren Maximum ist die Stelle des Wende-punkts von f. Mit **2ND CALC maximum** finden Sie im Intervall [6;10] das Maxi-mum an der Stelle x=8,5.

Ergebnis: Um 8:30 Uhr ist der Temperaturanstieg am größten.

Durchschnittliche Temperatur:
Der Mittelwert der Temperatur innerhalb der Zeitspanne von 6:00 Uhr bis 18:00 Uhr ist gegeben durch das Integral $\frac{1}{18-6}\int_6^{18} f(x)\,dx$

Den Wert berechnen Sie mit dem GTR. Im Anzeigemodus wählen Sie **MATH fnInt(Y1,X,6,18)12 ENTER.** Sie erhalten den Mittelwert 25,04.

Ergebnis: Die Durchschnittstemperatur zwischen 6:00 Uhr und 18:00 Uhr beträgt etwa 25°C.

b) Idee: Schritt für Schritt die Grundfunktion sin(x) erweitern, bis wir zur endgültigen Funktionsgleichung kommen.

- g ist gegenüber sin(x) um 12LE auf der x-Achse nach rechts verschoben. → sin(x-12).
- Während die maximale Schwingungsweite bei sin(x) den Wert 1 hat, hat sie bei g den Wert 3. → 3·sin(x-12).
- Für $x\in[0;2\pi]$ durchläuft sin(x) eine volle Schwingung, g dagegen durchläuft für $x\in[0;24]$ eine volle Schwingung. Um das zu bekommen, erweitern Sie das Argument von sin(x) um den Faktor 2π und erhalten sin(2π x). Jetzt wird eine volle Schwingung durchlaufen, wenn x die Werte aus dem Intervall [0;1] annimmt. Wenn Sie jetzt noch durch 24 teilen haben Sie $\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)$ und eine volle Schwingung wird durchlau-fen, wenn x die Werte aus dem Intervall [0;24] annimmt.

Also ist 12 der Faktor, den Sie dem Argument der gesuchten Funktions-gleichung mitgeben müssen. → $3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-12)\right]$

- g ist gegenüber sin(x) um 18LE auf der y-Achse nach oben verschoben.

→ $3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-12)\right]+18$

Ergebnis: Die gesuchte Funktionsgleichung lautet

$$\boxed{g(x)=3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-12)\right]+18}$$

g stellt die Innentemperatur des Hauses dar. Es bedarf immer einer ge-wissen Zeitspanne, bis von Außen nach Innen ein Temperaturausgleich stattfindet, daher hinkt g gewissermaßen f hinterher.

Zeitpunkt des maximalen Temperaturunterschieds
Der Temperaturunterschied zwischen den beiden Kurven ist gegeben durch f(x)-g(x). Wechseln Sie in den Y-Editor des GTR und geben Sie bei $\mathbf{Y_3}$ die Funktion f-g ein. Lassen Sie sich die neue Kurve mit GRAPH zeichnen und bestimmen Sie das Maximum mit **2ND CALC maximum** im Intervall [10;16]. Sie erhalten etwa x=13,1 und y=9,61. 1 Stunde entsprechen 60 Minuten, d.h. 0,1 Stunde entsprechen 6 Minuten, x=13,1 entspricht daher dem Zeitpunkt 13:06 Uhr.

Ergebnis: Um 13:06 Uhr ist der Temperaturunterschied zwischen Innen und Außen am größten und beträgt dann etwa 9,61°C.

c) Zum Zeitpunkt x = 24 stimmen f und h überein, d.h. f(24) = h(24). Daraus ergibt sich die erste Gleichung 22,5867=24a+b. Die zweite bekommen wir aus der Angabe f'(24) = h'(24).

Nun ist $f'(x)=\frac{8\pi}{12}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right]$ und $h'(x)=\frac{10\pi}{12}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right]+a$

(jeweils nach Anwendung der Kettenregel). Also gilt f'(24)=-1,275 und h'(24)=-1,5937+a und daher gilt -1,275=-1,5937+a. Daraus ergibt sich a=0,318, eingesetzt in die erste Gleichung folgt b=14,954.

Durchschnittliche Außentemperatur

Die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag ist gegeben durch

$$\frac{1}{48-24}\int_{24}^{48}\left(10\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right]+ax+b\right)dx$$

$$=\frac{1}{24}\int_{24}^{48}10\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right]dx \;+\; \frac{1}{24}\int_{24}^{48}(ax+b)\,dx$$

Das erste Integral erstreckt sich über eine volle Schwingungsdauer. Aufgrund der Symmetrie der Sinus-Funktion ist der Wert des Intrgrals gerade 0. Es bleibt nur noch das zweite Integral übrig und dieses wird wie behauptet durch den Term ax+b bestimmt.

Ergebnis: Die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag wird durch den Term ax+b bestimmt.